Appunti di ELETTRONICA - Capitolo 1

Argomenti introduttivi

Testi consigliati 2
Un po' di storia 2
Introduzione 3
Premessa 3
Segnali analogici e digitali - Low voltage 3
Range di frequenza e approssimazione dei “parametri concentrati” 4
Componenti a circuiti elettronici 5
Limiti di validità 6
Definizione di “caratteristica elettrica” di un dispositivo 6
Caratteristiche statiche e dinamiche 7
Linearità di un elemento e di un circuito 7
Il principio della sovrapposizione degli effetti 9
Esempio 10
Esempio 12
Esempio 14
Teorema di Thevenin 16
Esempio 18
Esempio 19
Operazioni di shift dei generatori di corrente 23
Equivalente di Miller 25
Circuito equivalente di Miller 25
Esempio 26
Determinazione del punto operativo di un circuito 29
Introduzione 29
Circuito con un solo elemento non-lineare (diodo): metodo del fixed point30
Esempio: circuito con un solo elemento non-lineare (diodo) 31
Esempio: circuito con un solo elemento non-lineare (diodo Zener) 33
Esempio: circuito con due elementi non lineari 34
Circuito con 3 elementi non lineari 37
Approssimazione lineare a tratti delle caratteristiche 43
Teoremi generali per i circuiti resistivi 46
Teorema 1 46
Teorema 2 46
Teorema 3 46
Conseguenza: caso del diodo tunnel 46

TESTI CONSIGLIATI

- P.E. GRAY - R. G. MEYER
  Circuiti integrati analogici
- J. MILLMAN - A. GRABEL
  Microelettronica
- F. CORSI
  La reazione negli stati amplificatori elementari
  II Edizione - Biblios 1997
- SEDRA - SMITH
  Microelectronic Circuits
  Saunders College Publising
- LACAITA
  Circuiti elettronici
  Edizione Città Studi - Milano

Nozioni propedeutiche: *Elettrotecnica - Dispositivi elettronici*

UN PO' DI STORIA

1895	Primo radio transistor (Marconi)
1904	Diodo a vuoto (Fleming) - Comincia l'era dell'elettronica
1906	Diodo a vuoto (De Forest)
1925	Prima dimostrazione TV
1935	FET
1940	Radar
1947	BJT (Shockley)
1958	Primi circuiti integrali alla Texas Instruments ed alla Fairchild Semiconductors
1968	1° Amplificatore Operazionale: μA-709
1972	1° microprocessore 8088 a 8 bit (Intel)

Negli ultimi 30 anni, lo sviluppo dell'Elettronica è impressionante.

Introduzione

PREMESSA

Lo sviluppo dei circuiti integrati ha aggiunto una nuova dimensione allo studio dei circuiti elettronici ed i metodi classici di progettazione di circuiti a componenti discreti lasciano progressivamente il posto alla progettazione del sistema elettronico visto nel suo insieme, comprendente lo studio dei materiali, delle tecnologie, dei dispositivi e delle soluzioni circuitali.

Il corso di **Elettronica Applicata** si propone di fornire una introduzione all'analisi ed alla progettazione dei circuiti analogici (in grado di elaborare segnali elettrici *analoghi* ai fenomeni fisici che rappresentano) di uso più comune nelle applicazioni dell'elettronica. Il punto di vista preferenziale è quello della tecnologia dei circuiti integrati, per cui viene dato ampio spazio allo studio delle soluzioni più tipiche in questo ambito.

Il dominio di applicazione di tali circuiti riguarda il trattamento di segnali il cui spettro di frequenze si estende dalla continua fino ad alcune decine (al più qualche centinaio) di MHz. Si tratta, quindi, si circuiti che, per le loro dimensioni, possono essere considerati a parametri concentrati.

Una particolare enfasi viene attribuita allo studio ed al confronto delle diverse soluzioni circuitali in grado di fornire le migliori prestazioni a parità di dispositivi impiegati.

L'esposizione è suddivisa in due parti:

- la prima è dedicata all'*analisi delle reti da un punto di vista statico (o quasi statico)*: in questa parte rientra lo studio generale delle reti resistive, includendo lo studio della polarizzazione, del comportamento ai piccoli ed ai grandi segnali (a centro banda) dei vari stadi amplificatori senza e con reazione;
- la seconda parte tratta dello *studio dei circuiti da un punto di vista dinamico*: essa include gli aspetti del comportamento in frequenza e della stabilità dei circuiti RC.

I circuiti di impiego più ricorrente sono, in genere, utilizzati come esempi per illustrare nei dettagli l'applicazione delle varie metodologie generali.

Il corso presuppone la conoscenza dei principi fondamentali dell'elettrotecnica, del funzionamento e dei modelli circuitali dei componenti elettronici e degli strumenti matematici e numerici di base per la soluzione dei sistemi di equazioni algebriche non lineari e di equazioni differenziali ordinarie.

SEGNALI ANALOGICI E DIGITALI - LOW VOLTAGE

Si definisce "**segnale analogico**" una grandezza elettrica (quindi una tensione o una corrente), continua nel tempo, "*analoga*" (ossia proporzionale) ad un fenomeno fisico che rappresenta. Un facile esempio di segnale analogico è la tensione elettrica prodotta da un microfono, il quale converte il segnale vocale, cioè delle onde di pressione, in una tensione ad esso proporzionale in ogni istante.

Noi ci occupiamo solo di segnali di tipo analogico aventi le seguenti caratteristiche:

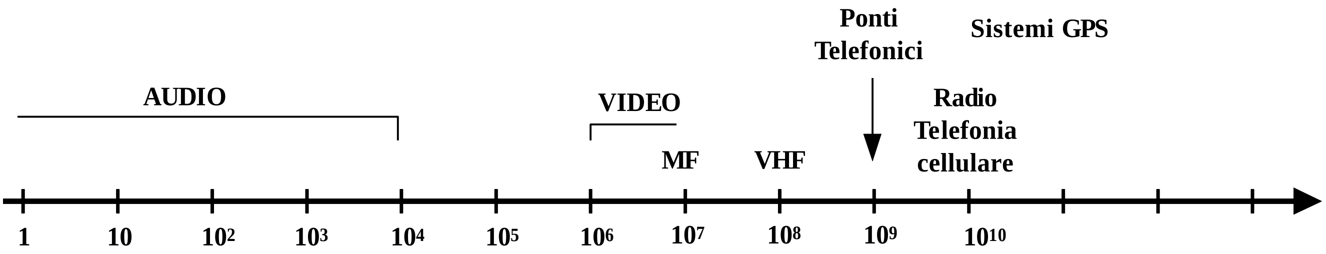
Autore: Sandro Petrizzelli

ampiezza:	dal μV al V
frequenza:	da 0 Hz a centinaia di MHz e oltre
potenza:	dal nW al kW

Nella realizzazione dei dispositivi e dei circuiti integrati, uno degli obbiettivi principali che si tende a raggiungere è il cosiddetto “**low voltage**” (basso voltaggio), necessario per ottenere anche basse dissipazioni di potenza (**low power**), ma necessario anche perché, data la sempre maggiore integrazione dei circuiti, bisogna evitare di sollecitare i materiali isolanti come, ad esempio, l’ossido di gate in un transistore MOS: minori sono i voltaggi, minori sono i campi elettrici, a parità di dimensioni dei dispositivi (dimensioni sempre più piccole).

RANGE DI FREQUENZA E APPROSSIMAZIONE DEI “PARAMETRI CONCENTRATI”

Al giorno d’oggi, nelle applicazioni in cui sono coinvolti circuiti elettronici, le frequenze utilizzate vanno tra 0 Hz (cioè il funzionamento in continua) ad alcune centinaia di MHz, arrivando quasi al GHz. A questo proposito, è possibile indicare schematicamente alcune delle principali applicazioni che coinvolgono i circuiti elettronici, suddivise in base alla frequenza di lavoro:



Il limite principale, nella frequenza di lavoro di un circuito elettronico, deriva essenzialmente da due fattori:

- in primo luogo, dalla possibilità o meno di applicare l’ “*approssimazione a parametri concentrati*”, ossia il fatto di poter ritenere il circuito “privo di dimensioni”(in modo da assumere la simultaneità degli eventi elettrici all’interno di un elemento circuitale);
- in secondo luogo, dai “*limiti fisici*” dei dispositivi di cui si compone il circuito.

Vediamo allora qualche dettaglio in più su questo aspetto.

*La condizione perché un circuito si possa ritenere “**a parametri concentrati**” è che la lunghezza d’onda l del segnale applicato sia molto maggiore delle dimensioni geometriche del circuito;* questa condizione vincola anche la frequenza di lavoro f in quanto essa è legata alla lunghezza d’onda dalla nota relazione $\boxed{\lambda f = c}$, dove c è la **velocità della luce** nel mezzo considerato (nel vuoto, essa vale notoriamente $3*10^8$ m/sec). Supponiamo, per esempio, che il segnale applicato al nostro circuito abbiamo una frequenza $f=10^{11}$ Hz, ossia 100 GHz; applicando quella relazione e facendo l’approssimazione che la velocità della luce sia quella nel vuoto, troviamo per λ il valore

$$l = \frac{c}{f} = 3mm$$

Abbiamo cioè trovato che, per un segnale a frequenza di 100 GHz, l'approssimazione dei parametri concentrati è senz'altro valida se il circuito ha dimensioni fisiche inferiori a 3mm. Quindi, per esempio, se consideriamo un circuito costituito semplicemente da un transistore MOS a canale corto, le cui dimensioni sono dell'ordine di 1-2 μm e anche meno, possiamo senz'altro affermare che il dispositivo si può ritenere a parametri concentrati, nonostante la frequenza del segnale sia così elevata.

Evidentemente, però, ad un simile valore di frequenza, per quanto il transistore si possa considerare a parametri concentrati, il suo rendimento è pessimo: infatti, come avremo modo di vedere in seguito, ad una tale frequenza gli effetti capacitivi del dispositivo sono molto elevati e quindi il dispositivo stesso non è senz'altro in grado di seguire l'andamento del segnale come dovrebbe. Ecco, quindi, nonostante la validità dell'approssimazione dei parametri concentrati, che *le caratteristiche fisiche del dispositivo impongono un preciso limite alla frequenza massima di lavoro.*

Oltre a questo, c'è anche da considerare il fatto per cui, se i transistori e gli altri dispositivi hanno dimensioni ormai molto piccole, sono senz'altro più grandi le **linee di interconnessione** dei circuiti stessi: queste linee possono essere di lunghezza maggiore di 3 mm, il che impone di considerarle come delle **linee a parametri distribuiti**, visto che introducono dei ritardi (dell'ordine, generalmente, di pochi nsec); alle basse frequenze, questi ritardi sono trascurabili, ma, per frequenze medio-alte, essi diventano importanti in quanto producono sfasamenti spesso fastidiosi del segnale in uscita rispetto a quello in ingresso.

Ad esempio consideriamo una linea senza perdite lunga 30cm: essa introduce un **ritardo** δ, sul segnale che lungo di essa si propaga, valutabile come

$$\delta = \frac{\ell}{v} = \frac{30(\text{cm})}{3*10^8(\text{m/s})} = \frac{30*10^{-2}(\text{m})}{3*10^8(\text{m/s})} = 1(\text{ns})$$

COMPONENTI A CIRCUITI ELETTRONICI

Un ***circuito elettronico*** *è definito come una interconnessione di componenti* (resistori, condensatori, dispositivi a semiconduttore, etc.). In generale, si distingue il componente fisico dall'elemento circuitale.

L'analisi e la progettazione circuitale si basano su:

- lo studio dei modelli elettrici dei singoli componenti;
- la teoria dei circuiti intesa come descrizione matematica delle proprietà dei modelli interconnessi.

Il **modello circuitale** di un componente è una descrizione delle relazioni tra le grandezze elettriche ai terminali del componente, ottenuta a partire dalla descrizione del componente in termini fisico-strutturali.

La **teoria dei circuiti** parte dai principi generali di conservazione dell'energia e della carica elettrica e giunge ad espressioni matematiche del comportamento di una interconnessione di modelli.

LIMITI DI VALIDITÀ

L'analisi e la progettazione dei circuiti elettronici si basano sull'uso di **modelli** di componenti (attivi e passivi) e sull'uso delle tecniche circuitali.
Limiti di validità dell'analisi sono legati dunque principalmente a due fattori:

- ai *modelli* adottati per i singoli dispositivi;
- alle *tecniche circuitali*, intese sia come tecniche numeriche sia come tecniche analitiche.

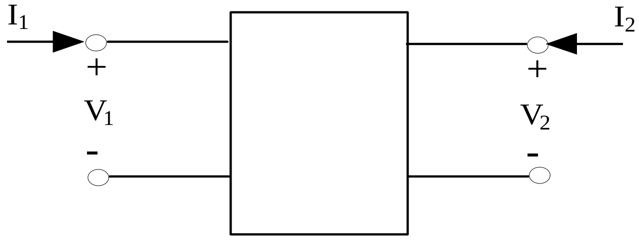
Nell'ambito, poi, delle tecniche circuitali, è sempre importante verificare che sia possibile applicare l'ipotesi dei parametri concentrati: per valori di frequenza particolarmente elevati, si può andare anche oltre tale approssimazione, entrando nell'ambito dei **circuiti a microonde**.

DEFINIZIONE DI "CARATTERISTICA ELETTRICA" DI UN DISPOSITIVO

Dobbiamo abituarci a considerare i dispositivi elettronici (a parametri concentrati) descritti solo dalle loro **caratteristiche**. Supponiamo perciò di avere un generico dispositivo o un generico circuito, con un qualsiasi numero di terminali: *prende il nome di "**caratteristica elettrica**" del dispositivo o del circuito l'equazione che definisce il comportamento elettrico del dispositivo o del circuito ai suoi morsetti.*
Nel caso di un elemento a due soli terminali, la sua caratteristica sarà rappresentata dall'equazione che lega la tensione alla porta dell'elemento con la corrente alla stessa porta: tanto per fare un esempio semplice, la caratteristica di un resistore lineare tempo-invariante è data dalla relazione V=RI, mentre la caratteristica di un **diodo a giunzione pn** è data dalla nota relazione (dovuta a **Schockley**)

$$I = I_S\left(e^{\frac{V}{V_T}} - 1\right)$$

Mentre, per un elemento a due terminali come un resistore lineare o un diodo, la caratteristica è una sola in quanto sono solo 2 le grandezze elettriche cui si può fare riferimento per caratterizzare il comportamento ai morsetti, per un elemento a più terminali ci sono invece più possibilità. Consideriamo, per esempio, un dispositivo fisico a 3 terminali (ad esempio un transistore), che sappiamo di poter rappresentare, a livello circuitale, mediante il cosiddetto "**biporta**":



In questo caso, le grandezze elettriche cui possiamo fare riferimento sono ben 4, per cui le possibilità che abbiamo sono le seguenti:

- ”**caratteristica ingresso-uscita in tensione**”: si tratta del grafico della funzione $f(V_1,V_2)=0$, ossia di una relazione solo tra la tensione in ingresso e quella in uscita;
- ”**caratteristica ingresso-uscita in corrente**”: si tratta del grafico della funzione $f(I_1,I_2)=0$;
- ”**trans-caratteristica**”: si tratta o del grafico della funzione $f(V_1,I_2)=0$ o di quello della funzione $f(I_1,V_2)$; in entrambi i casi, cioè, si riporta la relazione tra variabili diverse di ingresso e di uscita;
- ”**caratteristica di ingresso**”: si tratta del grafico della funzione $f(V_1,I_1)=0$;
- ”**caratteristica di uscita**”: si tratta del grafico della funzione $f(V_2,I_2)=0$.

Abbiamo, in definitiva, 6 distinte possibilità.

N.B. Osserviamo che, in modo analogo a quanto fatto in Elettrotecnica, per indicare una grandezza elettrica, *useremo lettere maiuscole quando questa grandezza è rigorosamente costante oppure quando varia in modo talmente lento da poterla ritenere costante, mentre invece useremo lettere minuscole quando essa varia con una certa frequenza non troppo bassa*.

Caratteristiche statiche e dinamiche

Esistono fondamentalmente due tipi di caratteristiche:

- si parla di “**caratteristica statica**” quando il segnale applicato al dispositivo o al circuito ha una frequenza molto bassa (si parla di segnale “lento”), ossia quando esso varia tanto lentamente da non “eccitare” le capacità;
- si parla invece di “**caratteristica dinamica**” quando il segnale applicato ha una frequenza tale da dover includere gli effetti capacitivi e da dover quindi introdurre i fenomeni dinamici che essi producono.

LINEARITÀ DI UN ELEMENTO E DI UN CIRCUITO

Al concetto di caratteristica è strettamente legato quello di “**linearità**”; per comodità, diamo la definizione di “elemento lineare” riferendoci ad un elemento a due soli morsetti: *si dice che un elemento a due morsetti è “**lineare**” quando è lineare la sua caratteristica, ossia quando, preso il piano nel quale noi rappresentiamo tale caratteristica, essa risulta essere una retta passante per l’origine.*

<u>In natura, tutti i dispositivi fisici sono non lineari</u>: la linearità, quindi, non è altro che una idealizzazione, una approssimazione matematica molto utile (sotto certe ipotesi) per semplificare la risoluzione dei problemi). D’altra parte, come vedremo, la non-linearità di un circuito non è sempre un aspetto negativo: ci sono infatti applicazioni (come la moltiplicazione di frequenza, il mixing di frequenza, lo scatto e altre) che non sarebbero possibili senza gli elementi non lineari.

<u>Da un punto di vista analitico</u>, possiamo anche caratterizzare meglio la proprietà di linearità di una caratteristica. Indicata con $y=f(x)$ la caratteristica dell’elemento o del circuito in esame, diremo che è **lineare** quando soddisfa alla seguenti due proprietà:

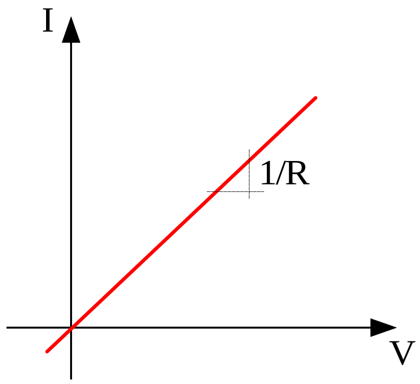
1. **proprietà di additività**: $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \quad \forall x_1 \text{ e } \forall x_2$

2. **proprietà di omogeneità**: $f(kx) = kf(x) \quad \forall x \text{ e } \forall k \in \Re$

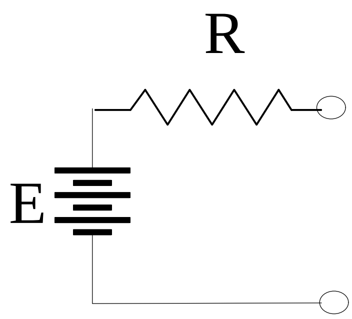
Come già anticipato prima, si può verificare che *gode di queste due proprietà solo una funzione f(x) che, rappresentata nel piano (x,y), corrisponda ad una retta passante per l'origine.*

Facciamo subito qualche esempio.

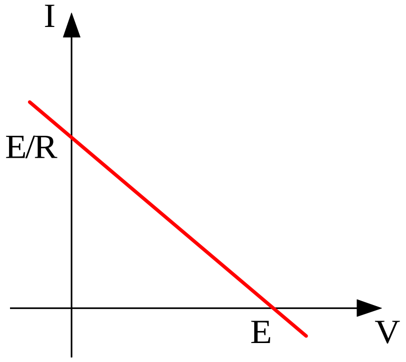
Un elemento senz'altro **lineare** è un resistore tempo-invariante la cui caratteristica sia data dalla relazione V=RI: infatti, nel piano I-V (tensione in ascisse e corrente in ordinate), questa relazione rappresenta una retta passante per l'origine e di pendenza 1/R:



Diverso è invece il caso di un circuito fatto nel modo seguente:



L'equazione che descrive il comportamento di questo circuito alla porta è $V = E - RI$ e la sua rappresentazione grafica nel piano I-V, cioè appunto la caratteristica del circuito, è la seguente:



Evidentemente, si tratta di una retta NON passante per l'origine. Una caratteristica di questo tipo (cioè appunto una retta non passante per l'origine) si ha in tutti i circuiti in cui siano presenti solo elementi lineari eccezion fatta per i generatori indipendenti. Allora, a proposito dei circuiti, la definizione di linearità è la seguente: *si dice che un circuito a due morsetti è "**lineare**" quando esso è costituito da tutti elementi lineari tranne i generatori indipendenti, ossia quando la sua caratteristica è una retta (passante o meno per l'origine).*

Sono poi da considerarsi elementi lineari tutti i generatori pilotati la cui forma d'onda rientra in uno dei seguenti casi:

$V_2 = aV_1$ generatore di tensione pilotato in tensione (**VCVS**)
$I_2 = bI_1$ generatore di corrente pilotato in corrente (**CCCS**)
$V_2 = rI_1$ generatore di tensione pilotato in corrente (**CCVS**)
$V_2 = gI_1$ generatore di corrente pilotato in tensione (**VCCS**)

Un circuito contenente solo resistori, sorgenti dipendenti e sorgenti indipendenti si dice **circuito resistivo**. Di solito, lo si include nella categoria dei circuiti lineari: a rigore, però, solo i resistori ed eventualmente i generatori dipendenti (se rientrano tra quelli indicati poco fa) formano la parte lineare del circuito.

IL PRINCIPIO DELLA SOVRAPPOSIZIONE DEGLI EFFETTI

La linearità di un circuito elettrico, così come è stata definita nel paragrafo precedente, è molto importante in quanto consente di applicare il noto "**principio della sovrapposizione degli effetti**":

Teorema - *Sia dato un circuito resistivo lineare tempo-invariante; supponiamo che esista una sola soluzione per questo circuito; supponiamo inoltre che il circuito contenga a generatori di tensione e b generatori di corrente; sotto queste ipotesi, una qualsiasi uscita del circuito $y_J(t)$ è esprimibile come combinazione lineare delle sole forme d'onda degli a+b generatori, ossia*

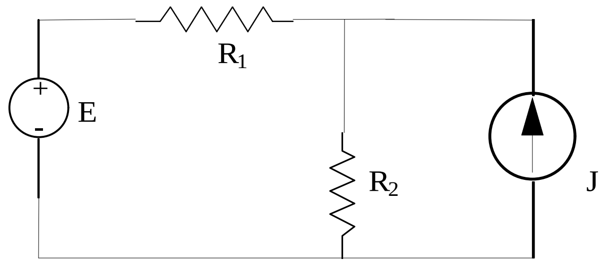
$$\boxed{y_J(t) = H_1V_{S,1} + H_2V_{S,2} + \ldots + H_\alpha V_{S,\alpha} + K_1I_{S,1} + K_2I_{S,2} + \ldots + K_\beta V_{S,\beta}}$$

dove i coefficienti H e K dipendono sia dagli elementi presenti nel circuito sia dall'uscita y_J prescelta; al contrario, essi non dipendono dalla forma d'onda dei generatori.

Questo principio, come specificato nell'enunciato, è dunque applicabile solo a circuiti che siano lineari. Su questa proprietà di linearità, però, c'è da intendersi bene. Lo facciamo con gli esempi seguenti.

Esempio

Consideriamo il circuito rappresentato in figura:



Vogliamo determinare I_2 e V_2 applicando il teorema di sovrapposizione: l'enunciato del teorema ci dice che i valori di tali incognite saranno dati da una combinazione lineare delle forme d'onda dei generatori di tensione e di corrente. Nel caso generale di α generatori di tensione e β generatori di corrente noi avremmo quindi che

$$I_2 = H_1 V_{S,1} + H_2 V_{S,2} + \ldots + H_a V_{S,a} + K_1 I_{S,1} + K_2 I_{S,2} + \ldots + K_b V_{S,b}$$
$$V_2 = H'_1 V_{S,1} + H'_2 V_{S,2} + \ldots + H'_a V_{S,a} + K'_1 I_{S,1} + K'_2 I_{S,2} + \ldots + K'_b V_{S,b}$$

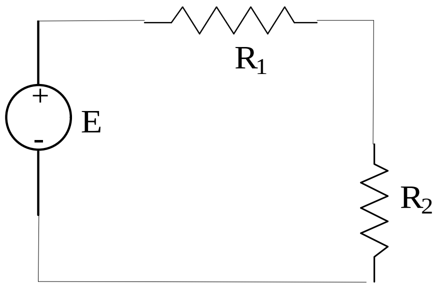
ossia dovremmo determinare tutti i coefficienti presenti in tali relazioni. Nel circuito considerato, invece, noi abbiamo α=1 generatori di tensione e β=1 generatori di corrente, per cui quelle relazioni si riducono alle seguenti:

$$I_2 = H_1 V_{S,1} + K_1 I_{S,1} = H_1 E + K_1 J$$
$$V_2 = H'_1 V_{S,1} + K'_1 I_{S,1} = H'_1 E + K'_1 J$$

per cui i coefficienti da determinare sono solo 4. Vediamo allora come si ottengono questi coefficienti; il metodo consiste di due passi fondamentali:

1. per ottenere i coefficienti relativi ai generatori di tensione basta risolvere il circuito che si ottiene da quello iniziale <u>eliminando</u> del tutto i generatori di corrente, ossia sostituendoli con dei circuiti aperti;
2. in modo analogo, per ottenere i coefficienti relativi ai generatori di corrente basta risolvere il circuito che si ottiene da quello iniziale <u>eliminando</u> del tutto i generatori di tensione, ossia sostituendoli con dei cortocircuiti.

Vediamo cosa accade nel nostro caso. Per determinare H_1 e H'_1, che sono i coefficienti relativi all'unico generatore di tensione, consideriamo il circuito che si ottiene da quello iniziale eliminando l'unico generatore di corrente: si tratta dunque del circuito



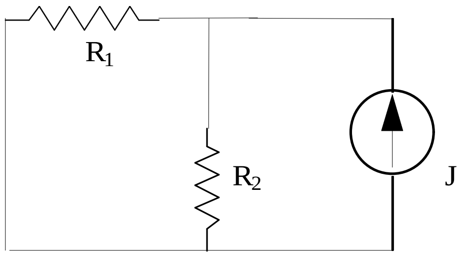
Applicando la regola del partitore di tensione, abbiamo che $V_{V,2} = \frac{R_2}{R_1+R_2}E$, da cui si ha anche che

$$I_{V,2} = \frac{V_{V,2}}{R_2} = \frac{1}{R_1+R_2}E$$

I coefficienti ricercati sono allora

$$\begin{cases} H_1 = \dfrac{R_2}{R_1+R_2} \\ H'_1 = \dfrac{1}{R_1+R_2} \end{cases}$$

Per determinare, invece, i coefficienti relativi al generatore di corrente dobbiamo considerare il circuito che si ottiene da quello iniziale eliminando il generatore di corrente, ossia il circuito



Applicando questa volta la regola del partitore di corrente, otteniamo $I_{V,2} = \frac{G_2}{G_1+G_2}J$, da cui

$$V_{V,2} = \frac{1}{G_1+G_2}J$$

Quindi, i coefficienti sono

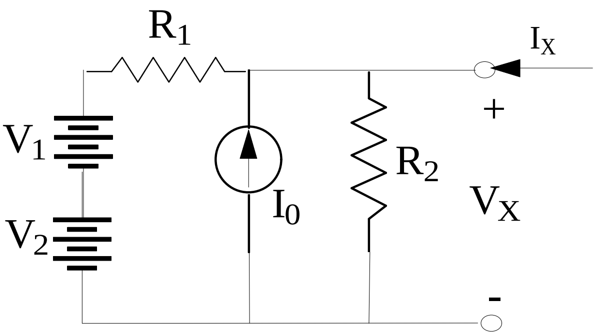
$$\begin{cases} K_1 = \dfrac{G_2}{G_1+G_2} \\ K'_1 = \dfrac{1}{G_1+G_2} \end{cases}$$

In conclusione, possiamo affermare che

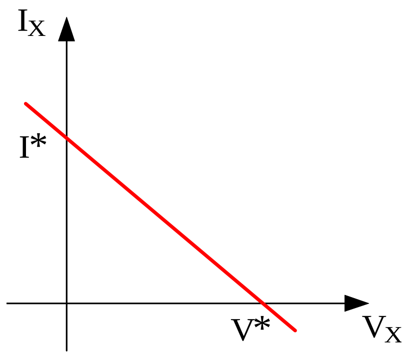
$$I_2 = H_1E + K_1J = \frac{R_2}{R_1+R_2}E + \frac{G_2}{G_1+G_2}J$$
$$V_2 = H'_1E + K'_1J = \frac{1}{R_1+R_2}E + \frac{1}{G_1+G_2}J$$

Esempio

Consideriamo il seguente circuito monoporta:



Vogliamo determinare la caratteristica del circuito, ossia la curva di I_X in funzione di V_X. Si tratterà, chiaramente, di una retta non passante per l’origine, in quanto il circuito contiene solo resistori lineari e generatori indipendenti: la rappresentazione grafica sarà dunque del tipo



ed avrà una equazione del tipo

$$I_X = I^* - \frac{I^*}{V^*} V_X$$

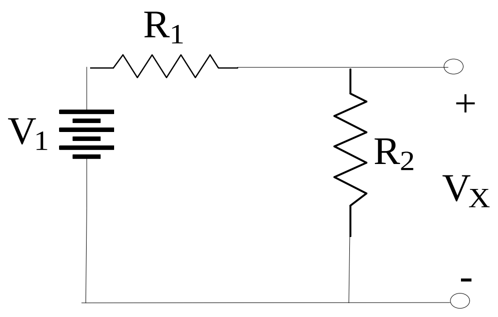
Come indicato nella figura, possiamo determinare i parametri di questa equazione andando a ricavare le due intersezioni I^* e V^* rispettivamente con l’asse delle ordinate e con l’asse delle ascisse: infatti

- l’intersezione I^* con l’asse delle ordinate è la cosiddetta “**corrente di cortocircuito**”, ossia la corrente che fluisce nel circuito quando i suoi due terminali sono in corto tra di loro;
- l’intersezione V^* con l’asse delle ascisse è invece la cosiddetta “**tensione a vuoto**”, ossia la tensione misurata ai terminali quando essi sono in condizioni di circuito aperto, ossia quando la corrente I_X che fluisce in tali terminali è nulla.

Calcoliamo perciò tali intersezioni. Possiamo applicare il principio della sovrapposizione degli effetti, visto che il circuito è lineare. Dobbiamo dunque passivare, di volta in volta, due dei tre generatori.

Cominciamo dal calcolo della **tensione a vuoto** V^*.

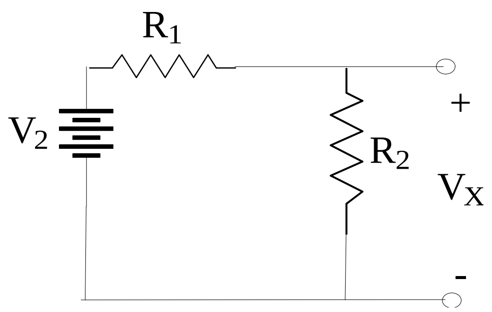
Passiviamo, come primo caso, il generatore di tensione V_2 ed il generatore di corrente I_0, in modo tale che il circuito diventi il seguente:



La tensione ai capi del circuito, applicando la regola del partitore di tensione, è

$$V'_X = V_{R2} = \frac{R_2 V_1}{R_1 + R_2}$$

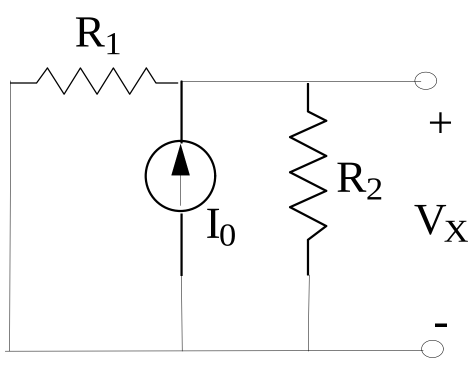
Adesso passiviamo V_1 e reinseriamo V_2: il circuito diventa



e si ottiene ovviamente

$$V''_X = V_{R2} = \frac{R_2 V_2}{R_1 + R_2}$$

Infine, passiviamo entrambi i generatori di tensione e lasciamo in funzione solo quello di corrente:



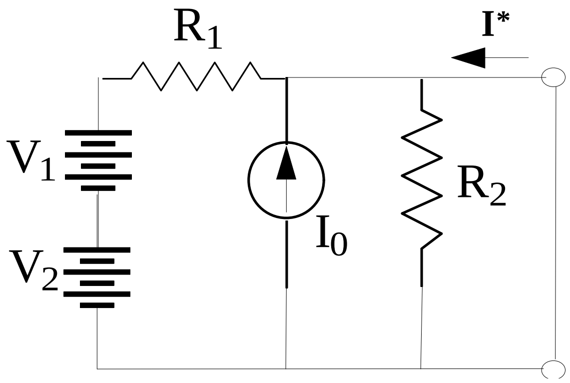
In questo caso, abbiamo le due resistenze in parallelo, per cui possiamo scrivere che

$$V'''_X = V_{R2} = \frac{R_1 R_2 I_0}{R_1 + R_2}$$

In conclusione, quindi, la tensione a vuoto del circuito è

$$V^* = V'_x + V''_x + V'''_x = \frac{R_2(V_1+V_2)+R_1R_2I_0}{R_1+R_2}$$

Passiamo alla **corrente di cortocircuito**, la quale si ottiene, in base alla definizione data prima, ponendo in corto i terminali del circuito:

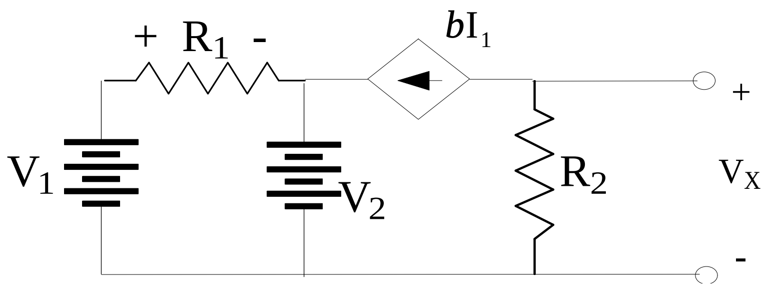


Il cortocircuito dei terminali, di fatto, esclude la resistenza R_2, per cui possiamo scrivere che

$$I^* = I_0 + \frac{V_1+V_2}{R_1}$$

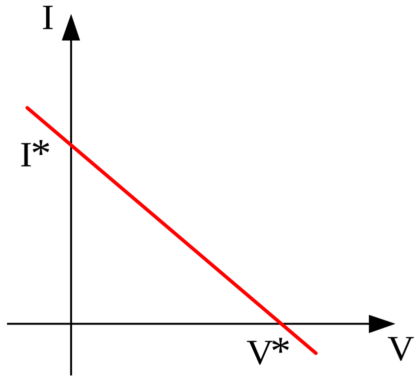
Esempio

Vediamo ora un altro esempio di determinazione della caratteristica di un circuito. In particolare, concentriamoci sul circuito seguente:



La particolarità sta evidentemente nella presenza di un generatore pilotato di corrente (la grandezza pilotante è la corrente nel resistore R_1, per cui si tratta di un CCCS, ossia “*Current Controlled Current Source*”).

Anche in questo caso, essendo il circuito costituito solo da resistori lineari (il CCCS è un resistore biporta ma è lineare) e da generatori indipendenti, la caratteristica sarà ancora una volta del tipo seguente:



ed avrà quindi una equazione del tipo

$$I_X = I^* - \frac{I^*}{V^*} V_X$$

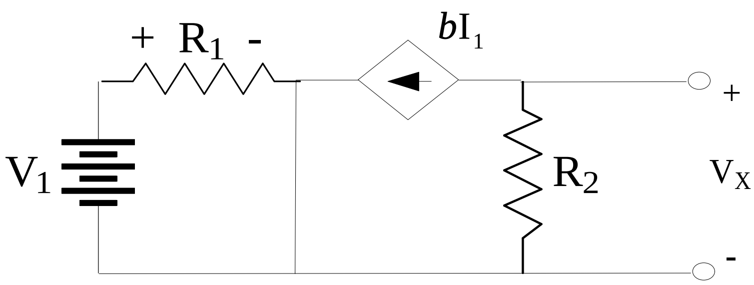
Per determinare questa caratteristica, possiamo calcolare innanzitutto la tensione a vuoto V^* e poi possiamo calcolare o la corrente di cortocircuito I^* oppure anche direttamente la pendenza della retta, che corrisponde al reciproco della resistenza di ingresso quando tutti i generatori indipendenti sono passivati.

Cominciamo dal calcolo di V^*, calcolo che effettuiamo applicando ancora una volta la sovrapposizione degli effetti.

Prima ancora di applicare questo principio, osserviamo intanto che la tensione che ci interessa è $V^* = V_{R2} = R_2 I_{R2}$: considerando che si tratta della tensione a vuoto, ossia quando la corrente in ingresso è I_X=0: applicando la LKC si nota allora che I_{R2}=-βI_1, per cui $V^* = -\beta R_2 I_1$.

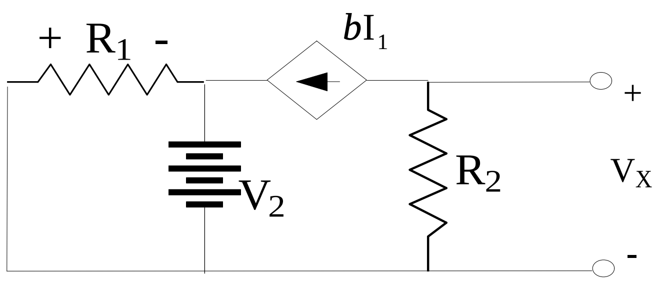
Per conoscere la tensione a vuoto dobbiamo dunque determinare I_1 sempre a vuoto, ossia sempre per I_X=0. Per fare questo calcolo, applichiamo, come detto, la sovrapposizione degli effetti.

Passivando il generatore V_2, il circuito diventa



La presenza di quel corto ci dice subito, applicando la LKT, che $I'_1 = \frac{V_1}{R_1}$.

Passivando adesso il generatore V_1, otteniamo il circuito seguente:



Il discorso è formalmente identico a prima, per cui $I''_1 = -\frac{V_2}{R_1}$.

Possiamo dunque concludere che

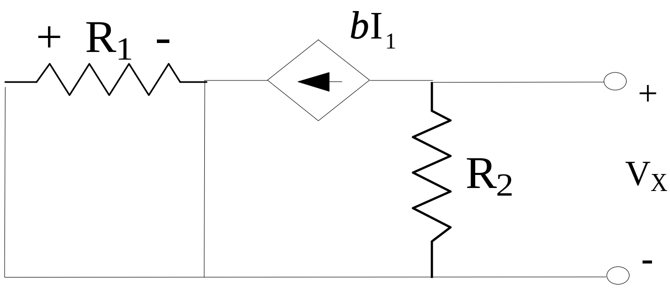
$$I_1 = \frac{V_1}{R_1} - \frac{V_2}{R_1} = \frac{1}{R_1}\left(V_1 - V_2\right)$$

e quindi, sostituendo nella relazione $V^* = -\beta R_2 I_1$, abbiamo che

$$V^* = -\beta \frac{R_2}{R_1}\left(V_1 - V_2\right)$$

Questa è dunque la tensione a vuoto, per determinare la pendenza della retta che rappresenta la caratteristica nel piano I-V, abbiamo detto che essa corrisponde al reciproco, cambiato di segno, della resistenza di ingresso del circuito, ossia della resistenza misurata ai terminali del circuito quando tutti i generatori indipendenti al suo interno sono passivati.

Allora, quando questi generatori sono passivati, il circuito è fatto nel modo seguente:



Dato che R_1 ha i terminali in corto, la corrente I_1 è nulla e quindi anche il generatore pilotato fornisce corrente nulla: concludiamo perciò che la resistenza di ingresso è R_2, per cui la pendenza della caratteristica è $-1/R_2$.

L'equazione della caratteristica di questo circuito è dunque

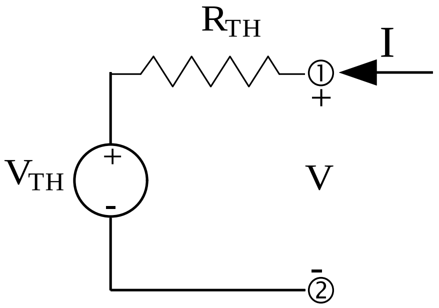
$$I_X = \frac{V^*}{R_2} - \frac{1}{R_2} V_X$$

TEOREMA DI THEVENIN

L'enunciato di questo teorema è noto:

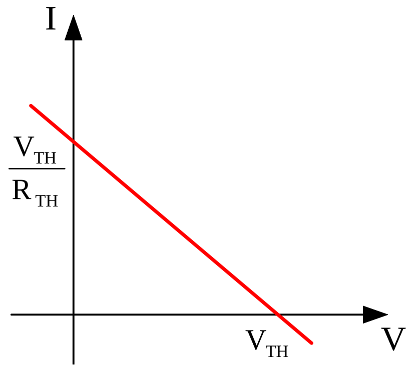
Teorema: Sia dato un circuito monoporta che sia <u>lineare, resistivo e tempo-invariante</u>; siano 1 e 2 i morsetti di questo monoporta e con (V,I) la coppia delle sue variabili di porta; supponiamo che il circuito sia "ben definito", ossia che nessun elemento del circuito sia collegato a qualche eventuale variabile esterna al circuito; supponiamo infine che, se il circuito viene "pilotato" con un generatore di corrente I(t) qualsiasi, il circuito ammetta una sola soluzione.

Sotto queste ipotesi, il circuito dato può essere sostituito con un circuito ad esso EQUIVALENTE del tipo seguente:



In questo circuito, la tensione V_{TH} è la tensione alla porta del circuito quando quest'ultimo è in condizioni di circuito aperto; R_{TH} è invece la resistenza in ingresso al circuito quando tutti i generatori indipendenti presenti nel circuito sono stati passivati.

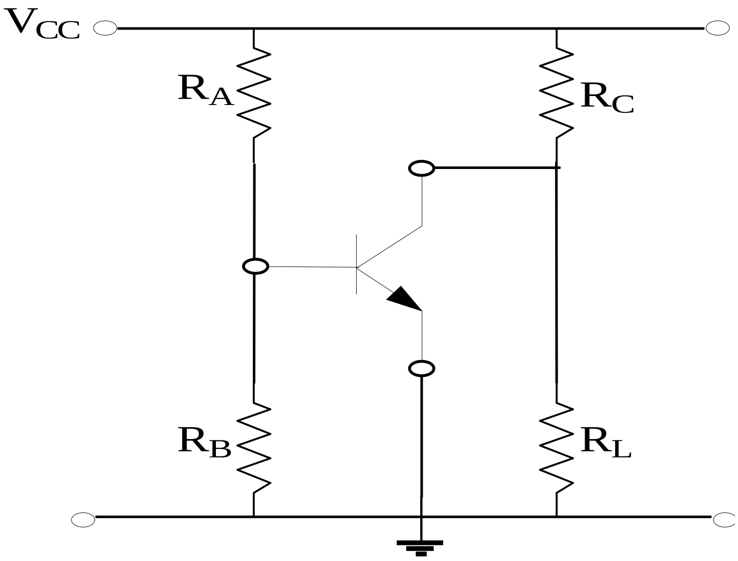
L'utilità dell'equivalente di Thevenin è abbastanza evidente: infatti, se abbiamo un circuito o una porzione di circuito a cui possiamo applicare il teorema di Thevenin, siamo subito in grado di dire che la caratteristica di questo circuito o di questa porzione di circuito, quale che sia la sua complessità, è comunque del tipo



Tutto sta, chiaramente, al calcolo di V_{TH} e R_{TH}, ma è chiaro quali facilitazioni di calcolo si abbiano nel momento in cui è possibile utilizzare una caratteristica di questo tipo.

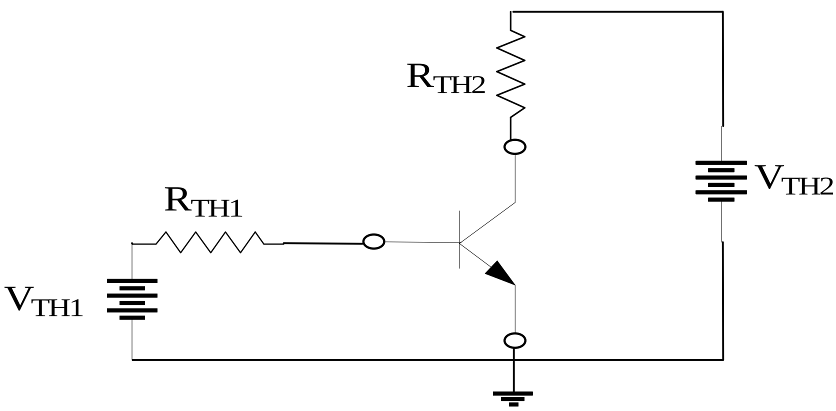
Esempio

Consideriamo il seguente circuito di polarizzazione di un BJT npn:

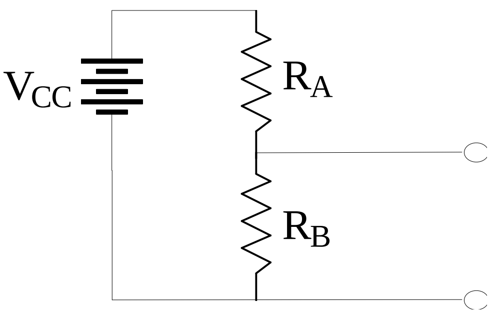


Vogliamo determinare l'influenza che la rete elettrica appena illustrata ha sui morsetti di collettore (C) e di emettitore (E) del BJT.

Per fare questo, possiamo procedere in due modi distinti: il primo modo è quello più complicato, in quanto consiste nel ragionare e fare i conti sulla rete così come è stata disegnata; il secondo modo, senz'altro più comodo, è quello, invece, di applicare il teorema di Thevenin, in modo da avere, sia alla porta Base-Emettitore sia alla porta Collettore-Emettitore, non la rete così com'è ma il suo equivalente di Thevenin:



Cominciamo allora a trovare l'equivalente di Thevenin alla porta di ingresso, ossia alla porta base-emettitore. La rete, vista da questa porta (dalla parte del BJT) è fatta nel modo seguente:



In condizioni di corrente entrante nulla, è evidente che la tensione alla porta (cioè la tensione a vuoto) è quella ai capi di R_B, per cui essa vale

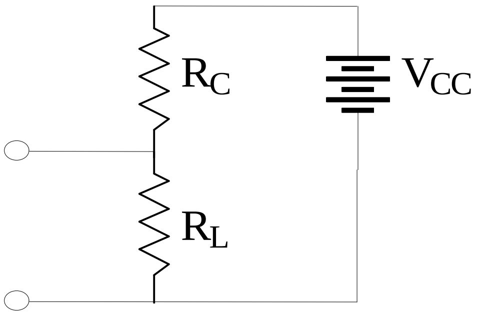
$$V_{TH1} = V_B = \frac{R_B V_{CC}}{R_B + R_A}$$

Inoltre, nel momento in cui passiviamo V_{CC}, è chiaro che le due resistenze sono in parallelo, per cui la resistenza di ingresso è

$$R_{TH1} = \frac{R_B R_A}{R_B + R_A}$$

Abbiamo così determinato l'equivalente di Thevenin alla porta di ingresso.

Facciamo lo stesso alla porta di uscita, ossia la porta collettore-emettitore: la rete, vista da questa porta, è



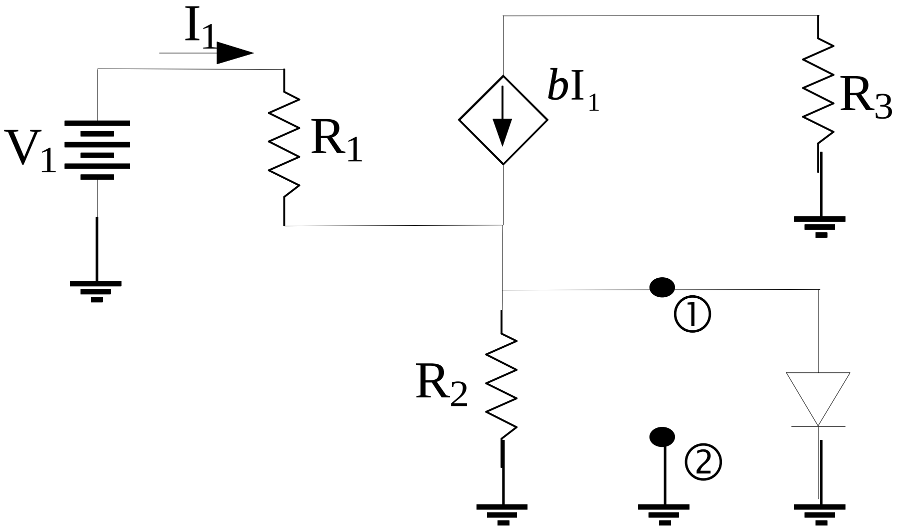
Essa è evidentemente analoga a quella vista prima, per cui diciamo subito che

$$V_{TH2} = \frac{R_L V_{CC}}{R_C + R_L}$$

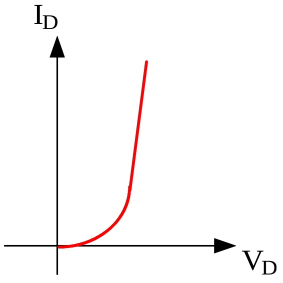
$$R_{TH2} = \frac{R_C R_L}{R_C + R_L}$$

Esempio

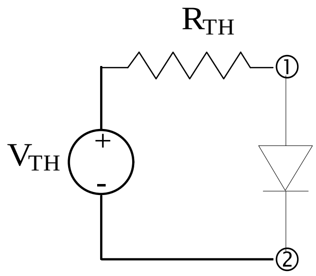
Consideriamo il seguente circuito:



Vogliamo il punto di lavoro del circuito nell'ipotesi che la caratteristica del diodo collegato ai morsetti 1 e 2 sia la seguente:

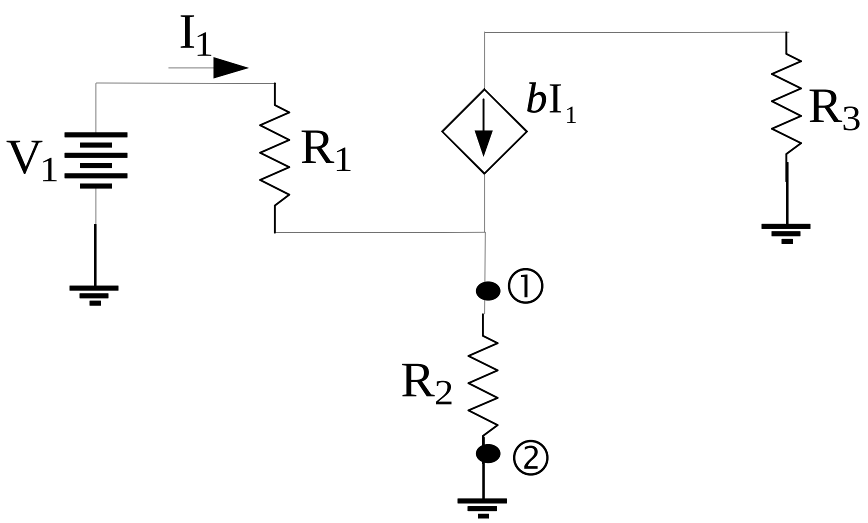


Possiamo risolvere questo problema determinando l'equivalente di Thevenin del circuito, escluso il diodo, alla porta 1-2: così facendo, il circuito diventa semplicemente



e quindi ci basterà intersecare la caratteristica dell'equivalente con quella del diodo in modo da ottenere il punto di lavoro.

Cominciamo allora a calcolare la tensione a vuoto del circuito, ossia la tensione quando la corrente ai terminali 1 e 2 è nulla. Il circuito, in questa condizione, può essere disegnato nel modo seguente:



E' subito evidente che la tensione V_{TH} che noi cerchiamo è la tensione ai capi di R_2: indicata allora con I_2 la corrente che fluisce in questo resistore, possiamo scrivere che $V_{TH} = R_2 I_2$. Dobbiamo calcolare I_2.

Applicando la LKC al nodo 1, otteniamo che

$$I_2 = I_1 + \beta I_1 = (1+\beta) I_1$$

per cui la tensione a vuoto risulta $V_{TH} = R_2(1+\beta)I_1$.

Dobbiamo calcolare I_1.

Possiamo intanto applicare la LKT alla maglia costituita da R_1 stesso e da R_2: risulta infatti

$$V_1 = V_{R1} + V_{R2} = R_1 I_1 + I_2 R_2 = R_1 I_1 + R_2(1+b)I_1 = [R_1 + R_2(1+b)]I_1$$

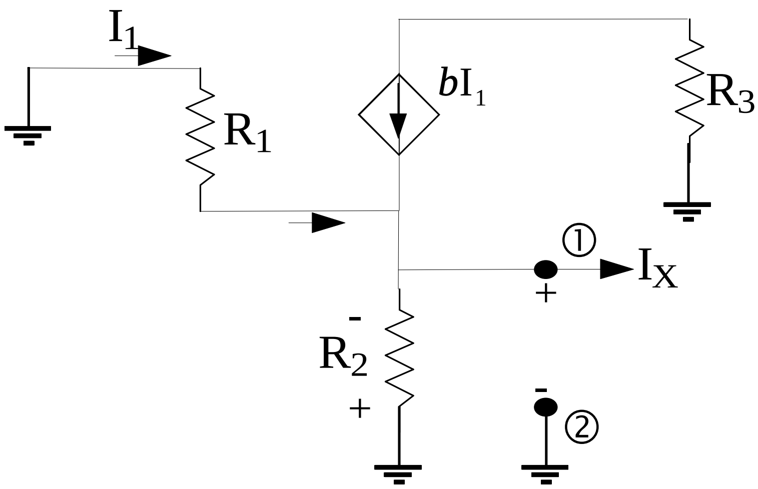
da cui

$$I_1 = \frac{V_1}{R_1 + R_2(1+b)}$$

Sostituendo nell'espressione della V_{TH}, concludiamo dunque che

$$\boxed{V_{TH} = \frac{R_2(1+b)V_1}{R_1 + R_2(1+b)}}$$

Passiamo adesso a calcolare la resistenza di Thevenin R_{TH}, ossia la resistenza vista dai morsetti del circuito quando tutti i generatori indipendenti sono passivati; in questa condizione, il circuito diventa il seguente:



Dobbiamo calcolare il rapporto tra la tensione applicata in ingresso e la corrente misurata ai terminali.

Applicando la LKC al nodo 1, abbiamo che

$$I_X = I_1 + \beta I_1 + I_2$$

La corrente I_2 che scorre in R_2 si ricava considerando che R_2 e R_1 sono in parallelo: la tensione ai loro capi è la tensione di porta V_X, per cui $I_2 = \frac{V_X}{R_2}$ e quindi

$$I_X = \frac{V_X}{R_2} + (1+\beta)I_1$$

Stesso discorso per I_1: quindi

$$I_X = \frac{V_X}{R_2} + (1+\beta)\frac{V_X}{R_1}$$

da cui

$$R_{TH} = \frac{V_X}{I_X} = \frac{1}{\frac{1+\beta}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

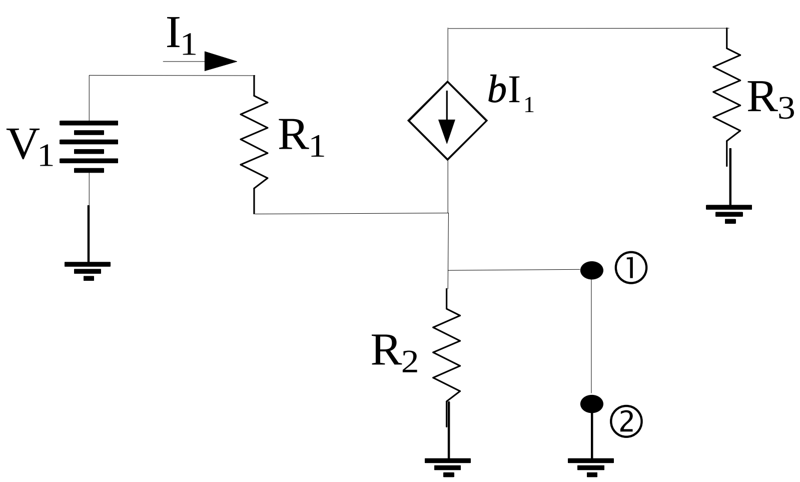
Si nota, da questa formula, che la resistenza di ingresso è il parallelo tra la resistenza R_2 e la resistenza $\frac{R_1}{1+\beta}$, per cui possiamo brevemente scrivere che

$$\boxed{R_{TH} = \frac{1+\beta}{R_1} // R_2}$$

<u>Osservazione</u>

C'è anche un altro modo per calcolare il valore di R_{TH}: dato che conosciamo V_{TH}, possiamo infatti calcolare questa resistenza come rapporto tra V_{TH} (tensione a vuoto) e la cosiddetta "**corrente di cortocircuito**", ossia la corrente che fluisce tra i terminali del circuito (da quello a potenziale maggiore a quello a potenziale minore) quando tali terminali vengono cortocircuitati.

Il circuito su cui ragionare è dunque il seguente:



Anzi, è ovvio che, in questo circuito, la resistenza R_2 è passivata, per cui è come se non ci fosse.

La corrente che fluisce dal nodo 1 al nodo 2 è evidentemente

$$I_{SC} = I_1 + \beta I_1 = (1+\beta)I_1$$

dove il pedice "SC" sta per "short circuit", ossia per "cortocircuito".

La corrente I_1 è quella che fluisce nel resistore R_1, il quale ha evidentemente un terminale a massa e l'altro connesso al polo positivo del generatore V_1: di conseguenza, la tensione ai capi di tale resistore è proprio V_1, per cui $I_1 = G_1 V_1$ e quindi possiamo scrivere che

$$I_{SC} = (1+\beta) G_1 V_1$$

Infine, dunque, la resistenza equivalente di Thevenin è

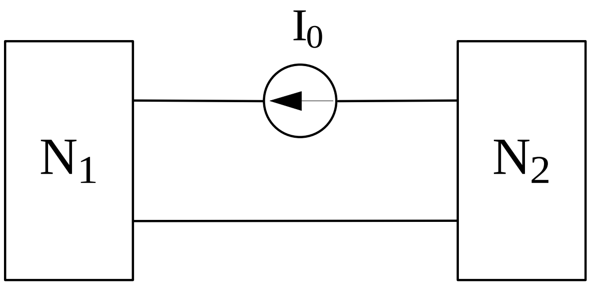
$$R_{TH} = \frac{V_{TH}}{I_{SC}} = \frac{\dfrac{R_2(1+b)V_1}{R_1 + R_2(1+b)}}{(1+b)G_1 V_1} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2(1+b)}$$

ed è ovviamente lo stesso risultato trovato prima.

Questo esercizio serve a mostrare un principio generale: *dovendo analizzare un circuito resistivo che contiene un solo elemento non lineare (come il diodo nel caso esaminato), è sempre opportuno sostituire la porzione di circuito non contenente tale elemento con il suo equivalente di Thevenin.*

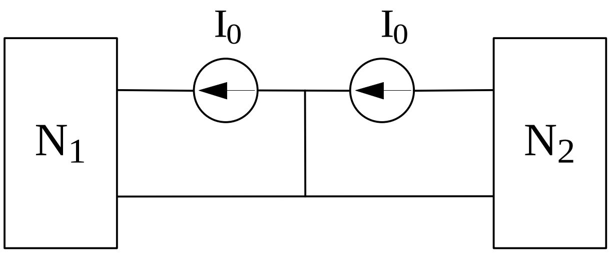
OPERAZIONI DI SHIFT DEI GENERATORI DI CORRENTE

Supponiamo di avere un circuito fatto nel modo seguente:



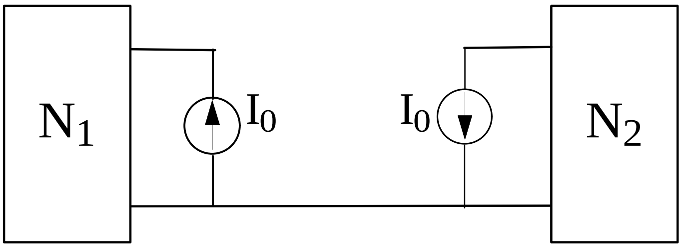
Vogliamo provare a trovare una configurazione circuitale equivalente a questa, ma con il generatore di corrente disposto in modo più comodo.

La prima operazione di equivalenza che possiamo compiere consiste in uno spostamento del generatore di corrente:



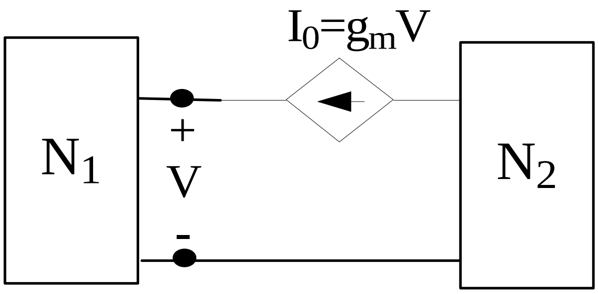
E' infatti evidente che la LKC non subisce alcuna variazione rispetto alla situazione iniziale.

Una seconda operazione è inoltre la seguente:

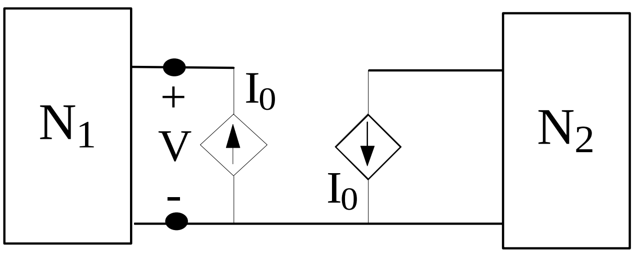


Anche in questo caso non abbiamo modifiche della LKC rispetto alla situazione iniziale, per cui questa configurazione circuitale è del tutto equivalente a quella di partenza.

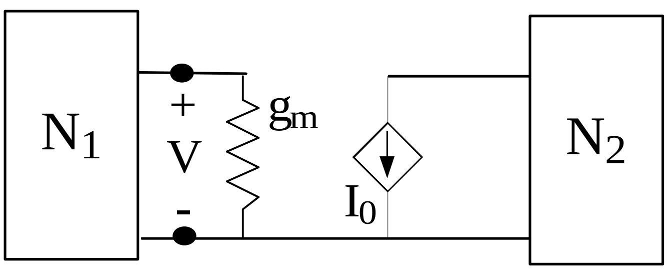
E’ ovvio che possiamo compiere gli stessi passaggi se, al posto del generatore indipendente di corrente, ne avessimo uno dipendente. Supponiamo ad esempio che il circuito sia fatto nel modo seguente:



Eseguendo la stessa operazione compiuta prima, otteniamo



C’è però una differenza fondamentale con prima: infatti, il generatore pilotato che si trova a sinistra, vede applicata ai suoi capi la stessa tensione che lo pilota; trattandosi di un generatore di corrente, esso si comporta perciò come un resistore di resistenza pari a $1/g_m$, per cui la configurazione finale è la seguente:

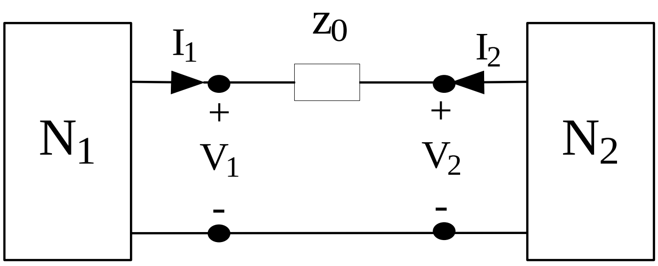


Questa operazione di equivalenza sarà utilizzata spesso nel seguito, ma è anche utile per introdurre un’altra operazione di equivalenza spesso applicata nella pratica.

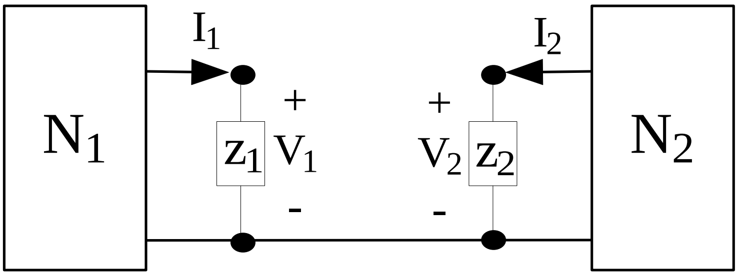
Equivalente di Miller

CIRCUITO EQUIVALENTE DI MILLER

Supponiamo di avere un circuito fatto nel modo seguente:



Ci chiediamo se sia possibile determinare due impedenze z_1 e z_2 in modo che questa configurazione circuitale sia equivalente a quest'altra:



La soluzione di questo problema è immediata: infatti, nella configurazione circuitale di partenza è evidente che

$$I_1 = \frac{V_1 - V_2}{z_0}$$

mentre nell'altra configurazione circuitale si ha che $I_1 = \frac{V_1}{z_1}$.

Eguagliando le due espressioni di I_1 ed esplicitando z_1, si ottiene quindi

$$\boxed{z_1 = \frac{z_0}{1 - \frac{V_2}{V_1}}}$$

Facendo lo stesso discorso per la corrente I_2, si ha che

$$\frac{V_2 - V_1}{z_0} = I_2 = \frac{V_2}{z_2}$$

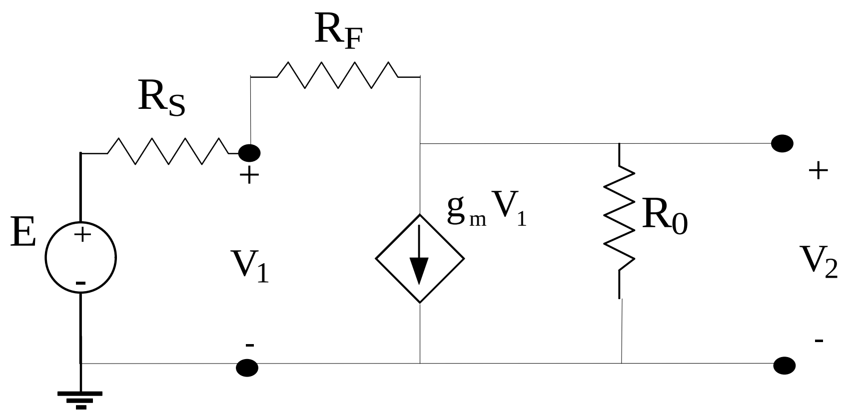
da cui possiamo concludere che

$$\boxed{z_2 = \frac{z_0}{1 - \frac{V_1}{V_2}}}$$

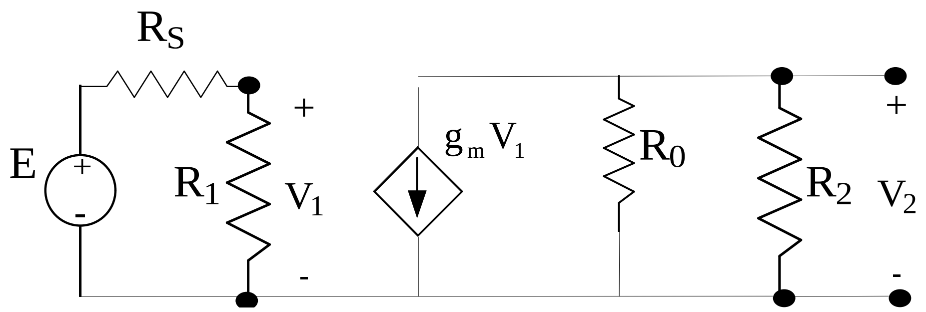
Abbiamo dunque trovato l' "**equivalente di Miller**" del circuito considerato.

ESEMPIO

Consideriamo il circuito seguente:



La resistenza che vogliamo spostare usando l'equivalenza di Miller è R_S La configurazione circuitale cui vogliamo arrivare è dunque la seguente:



Le formule da applicare per il calcolo di R_1 e R_2 sono quelle viste nel paragrafo precedente, ossia

$$R_1 = \frac{R_F}{1 - \frac{V_2}{V_1}}$$

$$R_2 = \frac{R_F}{1 - \frac{V_1}{V_2}}$$

Tutto sta, evidentemente, a calcolare quanto vale il rapporto V_2/V_1 nel circuito di partenza.

Intanto, applicando la LKT, abbiamo che $V_1 = R_F I_{RF} + V_2$. Per trovare quanto vale il rapporto V_2/V_1 dobbiamo dunque trovare una espressione della I_{RF} in funzione di una o entrambe queste tensioni. Questa espressione si ottiene facilmente applicando la LKC: si vede infatti che

$$I_{RF} = g_m V_1 + G_0 V_2$$

Sostituendo nell'equazione trovata prima, abbiamo che

$$V_1 = R_F\left(g_m V_1 + G_0 V_2\right) + V_2$$

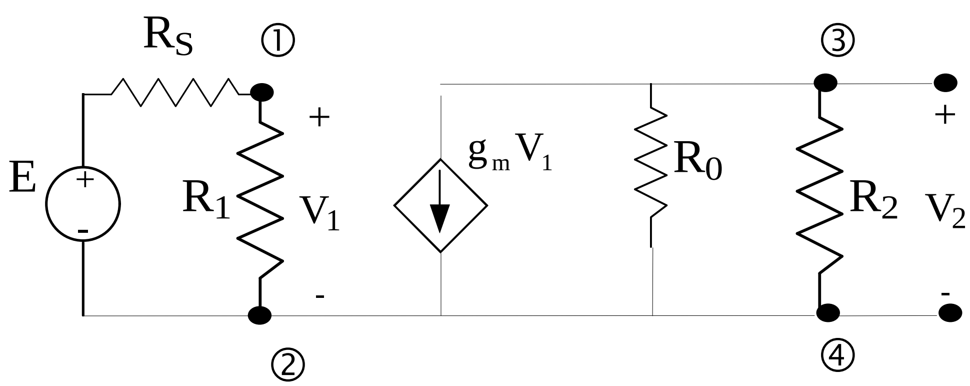
e da qui possiamo concludere che

$$\boxed{\frac{V_2}{V_1} = \frac{1 - R_F g_m}{R_F G_0 + 1}}$$

Quindi, le due resistenze da porre al posto di R_F sono le seguenti:

$$R_1 = \frac{R_F}{1 - \frac{1 - R_F g_m}{R_F G_0 + 1}}$$
$$R_2 = \frac{R_F}{1 - \frac{R_F G_0 + 1}{1 - R_F g_m}}$$

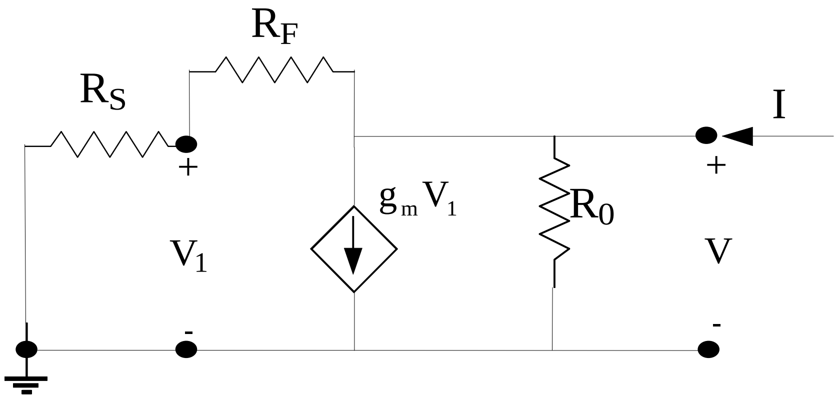
Il circuito cui siamo pervenuti è dunque il seguente:



Di questo circuito può essere interessante calcolare quanto vale il "**guadagno di tensione**" del circuito, ossia quanto vale il rapporto $A_V = \frac{V_2}{E}$ tra la tensione in ingresso E e quella in uscita V_2 (a vuoto). Si nota infatti che $V_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_S} E$, per cui

$$A_V = \frac{V_2}{E} = \frac{V_2}{V_1}\frac{V_1}{E} = \left(\frac{1 - R_F g_m}{R_F G_0 + 1}\right)\left(\frac{R_1}{R_1 + R_S}\right)$$

Un'altra figura di merito che possiamo calcolare del circuito in esame è la resistenza equivalente di Thevenin (altrimenti detta "**resistenza di uscita**"). Tuttavia, per effettuare questo calcolo, dobbiamo fare attenzione ad una cosa fondamentale: per definizione, *il calcolo della R_{TH} si effettua calcolando il rapporto tensione-corrente alla porta del circuito quando i generatori indipendenti presenti nel circuito stesso sono passivati;* calcolare il rapporto tensione-corrente in uscita equivale a porre in uscita un generatore di tensione V, nel misurare la corrispondente corrente assorbita I e nel fare il rapporto tra le due quantità; quindi, il circuito su cui noi andiamo a ragionare è il seguente:



Questo circuito è chiaramente diverso da quello di partenza, per cui avrà anche un equivalente di Miller diverso. Di conseguenza, se vogliamo sfruttare l'equivalente di Miller al fine di calcolare R_{TH}=V/I, dobbiamo applicare questa operazione di equivalenza a questo circuito e non utilizzare quella applicata prima al circuito di partenza.

Premesso questo, passiamo al calcolo vero e proprio. E' evidente che non è necessario applicare l'equivalente di Miller in quanto il circuito è abbastanza semplice.

Intanto, V_1 è la tensione ai capi di R_S, per cui $V_1 = R_S I_{RS}$. Inoltre, applicando la LKC abbiamo che

$$I_{RS} - g_m V_1 - I_{R0} + I = 0$$

da cui si ricava che $(1 - g_m R_S) I_{RS} = G_0 V - I$.

La corrente I_{RS} è quella che fluisce nei resistori R_S ed R_F, che sono in serie e che si trovano sottoposti alla tensione di ingresso V: quindi

$$I_{RS} = \frac{V}{R_S + R_F}$$

da cui, sostituendo nella relazione di prima, otteniamo

$$\frac{1 - g_m R_S}{R_S + R_F} V = G_0 V - I$$

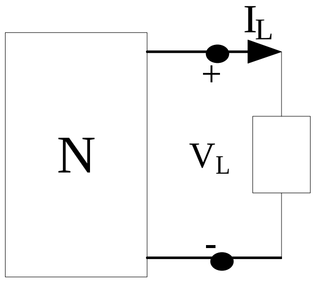
Da questa relazione possiamo infine concludere che

$$\boxed{R_{TH} = \frac{V}{I} = \frac{1}{G_0 - \dfrac{1 - g_m R_S}{R_S + R_F}}}$$

Determinazione del punto operativo di un circuito

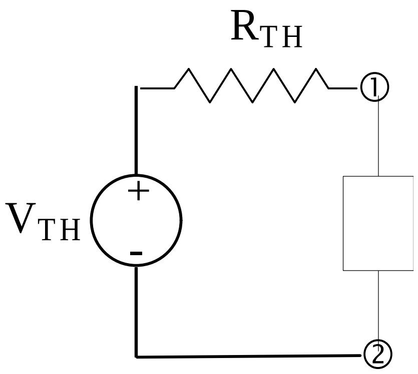
INTRODUZIONE

Supponiamo di avere un circuito contenente un solo elemento non lineare a due terminali (ad esempio un diodo) e, per il resto, solo elementi lineari e generatori indipendenti. Al fine di evidenziare questa particolare natura del circuito, lo possiamo schematizzare nel modo seguente:



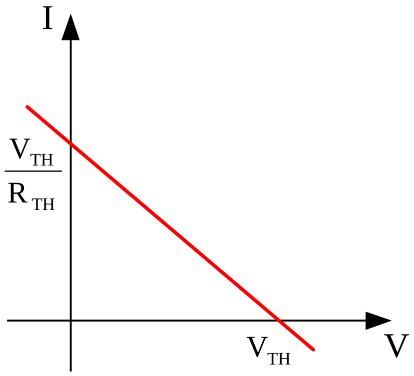
Evidentemente, il bipolo L è quello non lineare, mentre il monoporta N rappresenta la restante parte del circuito, composta solo da elementi lineari (ad esempio solo resistori) e generatori indipendenti. Ci chiediamo, allora, quale sia il "*punto di lavoro*" o "*punto di riposo*" o "**punto operativo**" di questo circuito.

Per la determinazione del punto operativo, il primo passo è senz'altro quello di sostituire il bipolo N mediante il suo equivalente di Thevenin, nel caso ovviamente N soddisfi le condizioni imposte dal teorema di Thevenin:



A questo punto, i metodi possibili sono essenzialmente di due tipi:

- c'è il "**metodo grafico**" che consiste nel trovare, graficamente appunto, l'intersezione tra la caratteristica del bipolo non lineare e quella dell'equivalente di Thevenin, che sappiamo essere del tipo

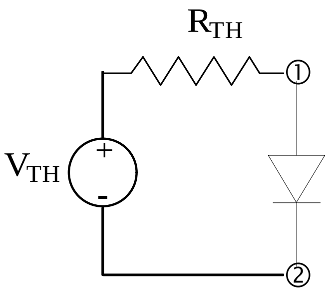


- c'è poi un "**metodo numerico**" che consiste nel trovare, con metodi numerici opportuni, l'intersezione tra le equazioni che rappresentano le due caratteristiche.

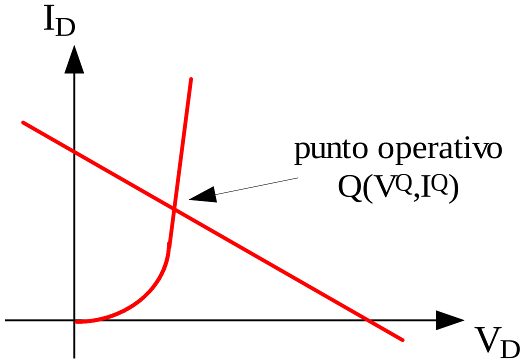
E' chiaro che il metodo grafico comporta delle approssimazioni ma è abbastanza rapido, mentre quello numerico, in linea di massima, è preciso ma più laborioso.

CIRCUITO CON UN SOLO ELEMENTO NON-LINEARE (DIODO): METODO DEL FIXED POINT

A titolo di esempio, vediamo allora come è possibile utilizzare un metodo numerico per calcolare il punto di lavoro di un circuito nel caso in cui l'elemento a due terminali non lineare sia un semplice diodo pn:



A livello grafico, l'intersezione tra le caratteristiche fornisce quanto segue:



N.B. Ovviamente, si è considerata, per quanto riguarda il diodo, solo la parte di caratteristica I-V relativa alla polarizzazione diretta, in quanto il circuito è chiaramente tale da garantire questa condizione di polarizzazione.

A livello analitico, c'è invece da risolvere il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} I_D = I_S\left(e^{\frac{V_D}{V_T}} - 1\right) \\ V_D = V_{TH} - R_{TH} I_D \end{cases}$$

La complessità matematica di questo sistema deriva ovviamente dal fatto che si tratta di un sistema trascendente per via della presenza del termine esponenziale: questo impedisce l'applicazione dei normali metodi analitici per la risoluzione dei sistemi lineari e obbliga perciò all'uso di opportuni metodi numerici. Quale potrebbe essere, allora, un metodo numerico appropriato per questa situazione?

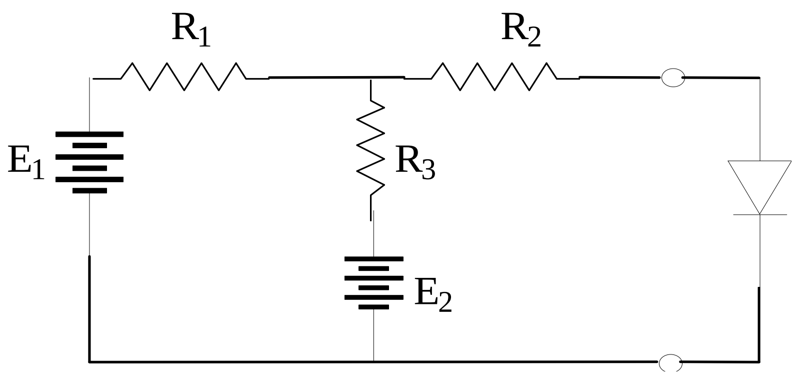
Parliamo del cosiddetto "**metodo iterativo del fixed point**": si fissa un valore iniziale, da scegliere con oculatezza, della corrente I_Q del punto di lavoro; si sostituisce quindi questo valore nell'equazione del diodo, trovando il corrispondente valore di tensione V_Q; questo valore di tensione viene sostituito nell'equazione della retta, trovando un nuovo valore I'_Q della corrente. Si ripete poi iterativamente il procedimento fino al momento in cui i valori di I_Q e V_Q, a seguito di ulteriori sostituzioni, si mantengono costanti. La costanza di tali valori indica che è stato individuato il punto di lavoro.

L'opportunità di usare un metodo del genere deriva dal fatto che la corrente nel diodo ha una crescita molto rapida dopo che è stata raggiunta l'accensione del diodo stesso e questo costituisce una garanzia di convergenza del metodo.

Abbiamo inoltre prima detto che, per applicare questo metodo, è necessario fissare un valore iniziale arbitrario di corrente. Come scegliere questo valore? E' subito chiaro che il valore da prendere deve avere un significato fisico: difatti, non avrebbe senso fissare un valore superiore a V_{TH}/R_{TH}, in quanto, come si nota dall'intersezione delle caratteristiche, non si potranno mai avere valori di corrente superiori a V_{TH}/R_{TH}. Di conseguenza, la "*stima iniziale*" della corrente potrebbe essere proprio V_{TH}/R_{TH}.

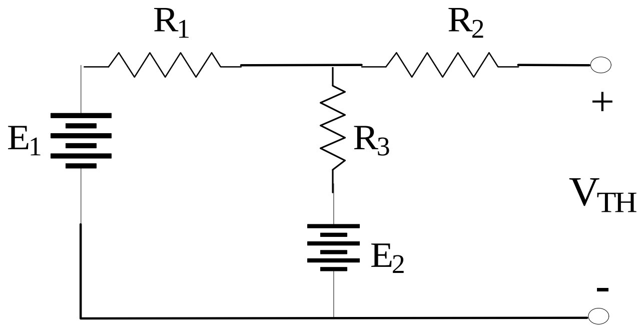
ESEMPIO: CIRCUITO CON UN SOLO ELEMENTO NON-LINEARE (DIODO)

Usando il metodo dell'equivalente di Thevenin, cerchiamo il punto di lavoro del seguente circuito:



Dobbiamo trovare l'equivalente di Thevenin alla porta AB del circuito.

Cominciamo con il caso della V_{TH}, che è la tensione di ingresso alla porta AB quando tale porta è in condizioni di cortocircuito; ciò significa che si tratta della tensione alla porta del circuito seguente:



Dato che non scorre corrente alla porta, la tensione che cerchiamo è quella ai capi del ramo contenente R_1 ed E_2. Possiamo allora applicare la sovrapposizione degli effetti. Passivando il generatore E_2, il contributo di E_1 è

$$V_{TH,1} = V_{R2} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E_1$$

Passivando invece E_1, il contributo di E_2 è

$$V_{TH,2} = V_{R1} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} E_2$$

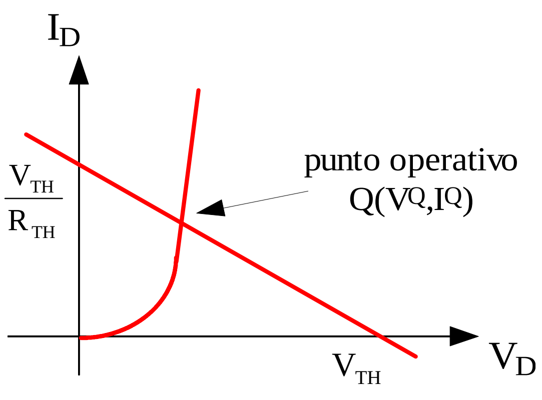
Concludiamo che la tensione di Thevenin è

$$V_{TH} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E_1 + \frac{R_1}{R_1 + R_2} E_2$$

Passiamo al calcolo della R_{TH}: la resistenza vista dai morsetti AB, quando E_1 ed E_2 sono passivati, è chiaramente la serie tra R_3 ed il parallelo tra R_1 ed R_2, per cui è

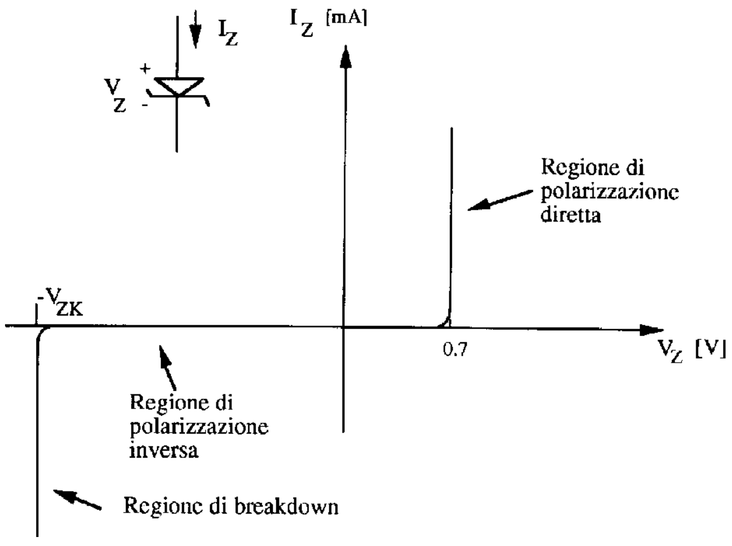
$$R_{TH} = R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Fatti questi conti, il punto operativo del circuito sarà dato dall’intersezione della caratteristica del diodo e della caratteristica del circuito equivalente di Thevenin appena determinato:

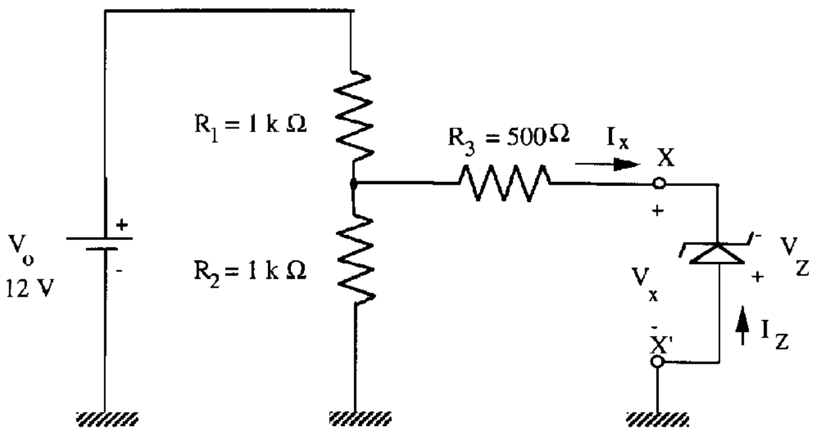


ESEMPIO: CIRCUITO CON UN SOLO ELEMENTO NON-LINEARE (DIODO ZENER)

Il diodo Zener è un normale diodo p-n, caratterizzato dal fatto di avere una tensione inversa di breakdown V_{ZK} piuttosto stabile (il che lo rende particolarmente utile per simulare un generatore di tensione). Una tipica caratteristica I-V di un diodo Zener è fatta nel modo seguente:



Supponiamo allora un circuito contenente un diodo di questo tipo:

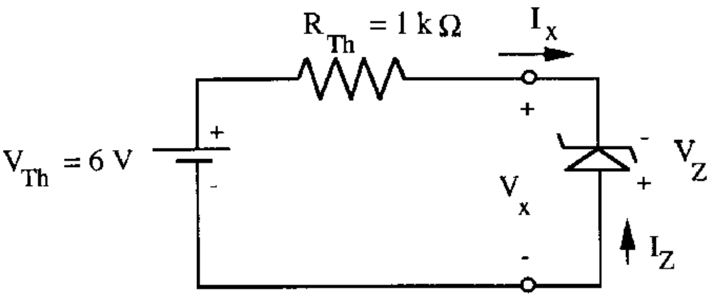


Ci interessa determinare il punto operativo del circuito, ossia, in definitiva, il punto operativo del diodo.

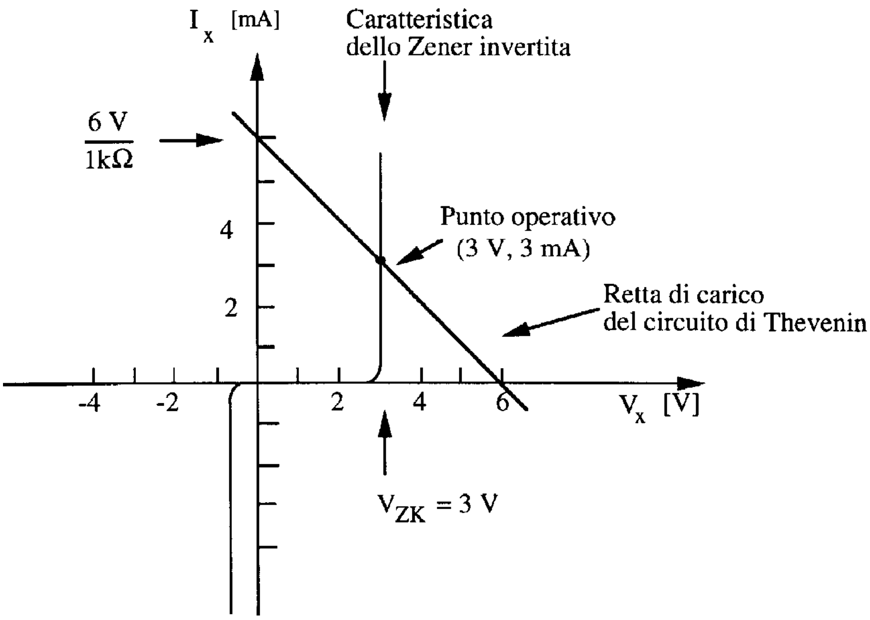
Per fare questo, la prima cosa opportuna da fare è quella di sostituire la parte di circuito a sinistra del diodo con il suo equivalente di Thevenin:

- la tensione di Thevenin non è altro che la tensione a vuoto alla porta X-X': si osserva facilmente che coincide con la partizione di V_O su R_2; essendo poi R_2 uguale ad R1, si deduce immediatamente che $V_{th}=V_O/2$;
- la resistenza di Thevenin, invece, è la resistenza vista dalla porta X-X' (cioè il rapporto tensione/corrente a tale porta) quando Vo è passivato: si trova facilmente che $R_{th} = R_3 + R_1 // R_2 = 1k\Omega$

Il circuito da analizzare si riduce dunque al seguente:



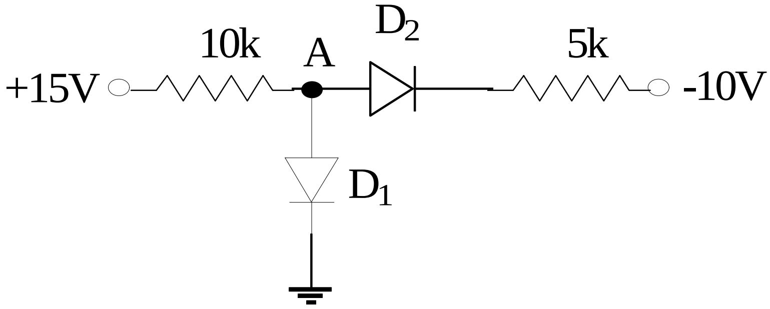
Da un punto di vista grafico, il punto operativo si trova intersecando la retta di carico corrispondente all'equivalente di Thevenin con la caratteristica I-V del diodo invertita nelle sue polarità:



ESEMPIO: CIRCUITO CON DUE ELEMENTI NON LINEARI

Le situazioni esaminate nei paragrafi precedenti prevedevano un circuito con un solo elemento non-lineare (in particolare un diodo, ma potevamo anche considerare, ad esempio, un elemento con caratteristica quadratica del tipo $I = k(V - V_0)^2$). Vediamo, allora, come è possibile procedere, per via essenzialmente qualitativa, nel caso in cui il circuito in esame contenga <u>due elementi non lineari</u>, ad esempio 2 diodi.

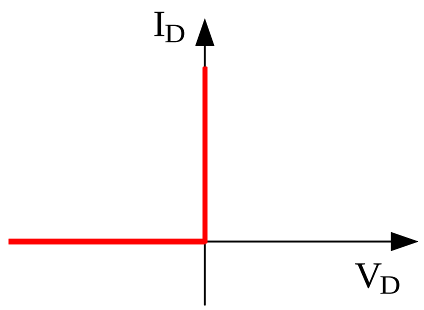
Supponiamo perciò che il circuito sia fatto nel modo seguente:



E' subito evidente che il punto di lavoro di questo circuito è condizionato dallo "stato" (acceso o spento) dei due diodi. Le possibilità sono ovviamente 4:

diodo D_1	**diodo D_2**
ON	ON
ON	OFF
OFF	ON
OFF	OFF

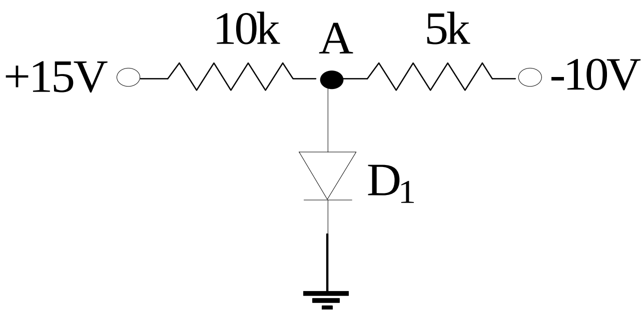
Facciamo, per semplicità, l'ipotesi che i due diodi siano ideali, il che significa che la loro caratteristica tensione-corrente è fatta nel modo seguente:



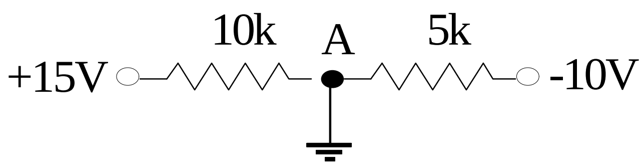
Questa caratteristica dice, in pratica, *che ciascun diodo non lascia passare corrente (cioè si comporta come un circuito aperto) quando la tensione applicata ai suoi capi è negativa, mentre invece si comporta come un cortocircuito quando tale tensione è positiva.*

Sulla base di ciò e sulla base della tabella tracciata prima, andiamo allora a vedere quali possibili situazioni si possono creare nel circuito.

Cominciamo dunque a verificare se i due diodi possono essere entrambi accesi: supponiamo ad esempio che D_2 sia acceso; se è acceso, esso si comporta come un cortocircuito, per cui il circuito è il seguente:



Se anche D_1 è acceso, significa che il punto A è a massa, per cui il circuito è fatto nel modo seguente:



La corrente che scorre nel resistore da 10k è

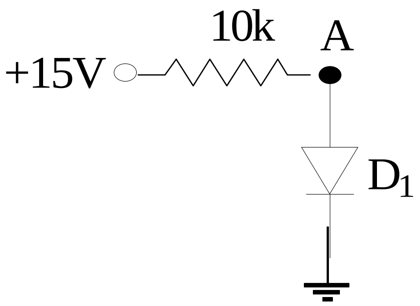
$$I_1 = \frac{15}{10*10^3} = 1.5*10^{-3}(A)$$

mentre quella che scorre in quello da 5k è

$$I_2 = \frac{0-(-10)}{5*10^3} = 2*10^{-3}(A)$$

La corrente I_1 è una corrente entrante nel nodo A, mentre la corrente I_2 è una corrente uscente; allora, prendendo positiva la corrente entrante, la corrente che deve fluire nel diodo D_1 è $I = I_1 - I_2 = -0.5*10^{-3}(A)$. Questa è una corrente che raggiunge il nodo A attraverso il ramo di D_1, ossia è una corrente inversa per D_1: ma noi stiamo supponendo che D1 sia in diretta, per cui <u>possiamo escludere che i due diodi siano entrambi accesi</u>.

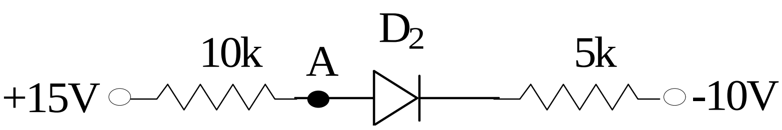
Verifichiamo allora se è possibile che i due diodi siano entrambi spenti. Supponiamo, ad esempio, che D_2 sia spento: il circuito è allora



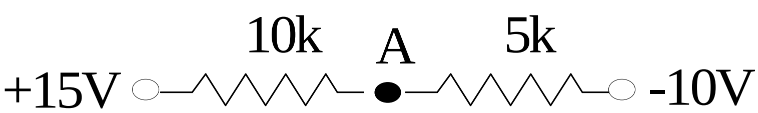
Se è spento anche D_1, la tensione al punto A è positiva e quindi la tensione ai capi di D_2 è senz’altro positiva, per cui D_2 non può essere spento.

Abbiamo dunque scartato due possibilità, per cui ne rimangono altre due.

Supponiamo ad esempio che il diodo D_1 sia spento: se D_1 è spento, nel suo ramo non scorre corrente, per cui il circuito si riduce semplicemente a



Supponiamo inoltre che D_2 sia acceso: ciò significa che lo possiamo sostituire con un cortocircuito, per cui il circuito diventa



Possiamo allora calcolarci la corrente che scorre nel ramo, visto che i due resistori sono in serie: essa vale evidentemente

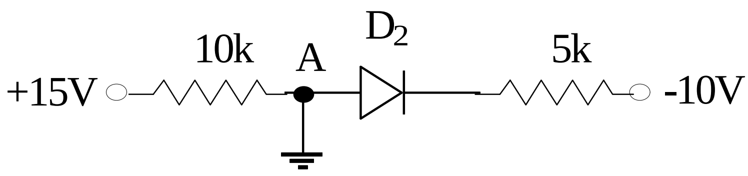
$$I = \frac{15-(-10)}{10k+5k} = \frac{25}{15*10^3} = 1.67*10^{-3}(A)$$

Possiamo anche calcolarci la tensione nel punto A, che risulta essere la tensione ai capi del diodo D_1: risulta evidentemente

$$V_A = 15 - 1.67 * 10^{-3} * 10 * 10^3 = 15 - 16.7 = -1.7(V)$$

Abbiamo dunque trovato che la tensione nel punto A è negativa, il che significa che la tensione ai capi di D_1 è negativa e, quindi, che l'ipotesi fatta di D_1 spento e D_2 acceso è ragionevole.

L'ultima possibilità da verificare è che D_1 sia acceso e D_2 spento: se D_1 è acceso, il circuito è



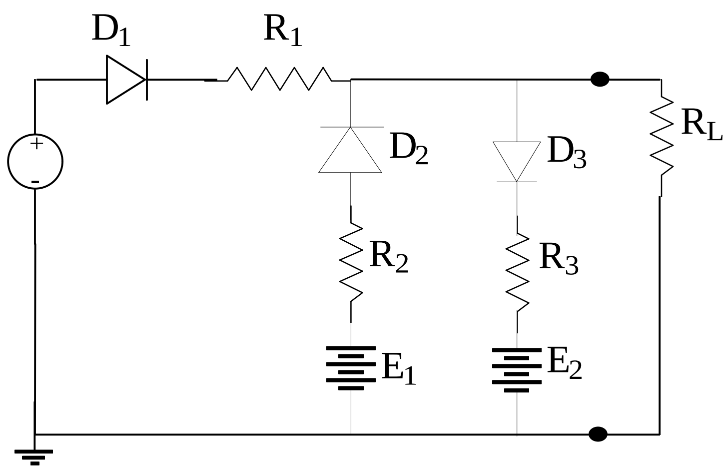
Essendo il punto A a massa, la tensione ai capi del diodo D_2 è certamente positiva, per cui D_2 non può essere spento.

Possiamo concludere che *l'unica possibilità di funzionamento di questo circuito è che il diodo D_1 sia spento, mentre D_2 sia acceso.*

I dati numerici sul punto di lavoro sono stati trovati prima.

CIRCUITO CON 3 ELEMENTI NON LINEARI

Complichiamo ulteriormente i nostri discorsi considerando un circuito resistivo in cui i diodi presenti siano ben 3:

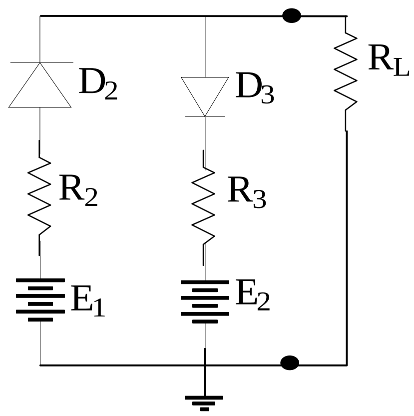


I dati numerici su questo circuito sono i seguenti: R_1=2.5KΩ; R_2=5KΩ; R_3=5KΩ; R_L=5KΩ; E_1=6V; E_2=20V. Inoltre, supponiamo ancora una volta che i tre diodi siano ideali. Ciò che vogliamo è la tensione V_L ai capi del carico R_L al variare della tensione in ingresso V_{IN}: vogliamo cioè la caratteristica di trasferimento in tensione di questo circuito.

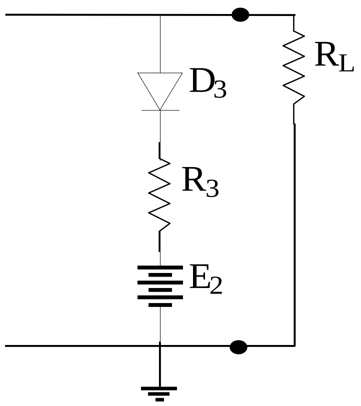
Così come abbiamo visto nell'esempio precedente, tutto sta a capire in quali condizioni (acceso o spento) si trovano i tre diodi al variare della tensione ingresso. Il modo più facile di procedere è quello di partire da un valore molto alto o molto basso della V_{IN} e di procedere poi per valori via via decrescenti o crescenti di tale tensione.

Partiamo perciò da un valore negativo molto basso della V_{IN} (cioè V_{IN} negativa e molto alta in valore assoluto). se V_{IN} è una tensione negativa alta, è ragionevole pensare che il diodo D_1 sia sottoposto ad una tensione inversa, per cui facciamo l’ipotesi che, per il momento, D_1 sia spento, salvo, ovviamente, a verificarne poi la correttezza.

Dire che D1 è spento significa, in pratica, dire che la tensione in ingresso non ha alcuna influenza sul circuito, il quale risulta essere il seguente:



Restano ancora da indagare le condizioni dei due diodi. Supponiamo ad esempio che D_2 sia spento; ciò significa che anche il ramo in cui si trova D_2 è come se non ci fosse:

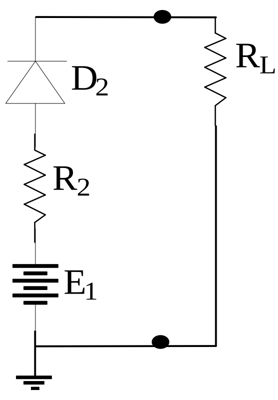


La tensione ai capi di D_3 è allora

$$v_{D3} = -E_2 - (R_L + R_3)I$$

Questa è una tensione negativa, per cui D_3 deve essere necessariamente spento.

Tuttavia, è facile verificare che, se D_3 è spento, necessariamente D_2 deve essere acceso. Se D_3 è spento, per cui il ramo che lo contiene è come se non ci fosse, il circuito può essere visualizzato nel modo seguente:



E' chiaro, allora, che, per lo stesso motivo per cui D_3 è spento, D_2 deve essere acceso: infatti, la tensione ai capi di D_2 è

$$v_{D2} = E_1 + (R_L + R_2)I$$

ed è una tensione senz'altro positiva.

Possiamo allora concludere che, fino a quando D_1 è spento, la situazione più ragionevole è che D_2 sia acceso e, quindi, D_3 sia spento. In questa situazione, il circuito è l'ultimo disegnato con, in più, un cortocircuito al posto di D2: dato che R_L e R_2 sono in serie, possiamo dunque scrivere che la tensione in uscita vale

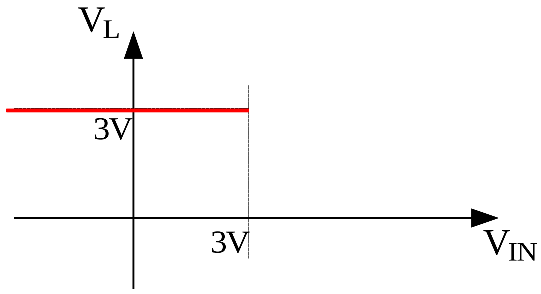
$$V_L = \frac{R_L}{R_L + R_3} E_1 = 3V$$

Ottenuto questo valore numerico, dobbiamo andare a verificare se le ipotesi fatte sono congruenti con esso: dobbiamo cioè verificare se le tensioni ai capi di D_1 e D_3 risultano effettivamente negative, nel qual caso le ipotesi sono congruenti, oppure no, nel qual caso dovremo cambiare ipotesi. Effettivamente, si verifica facilmente che le ipotesi sono corrette, per cui possiamo cominciare ad affermare che *quando la tensione in ingresso è negativa ed elevata in valore assoluto, la tensione in uscita è indipendente da essa ed è approssimativamente costante sul valore 3V.*

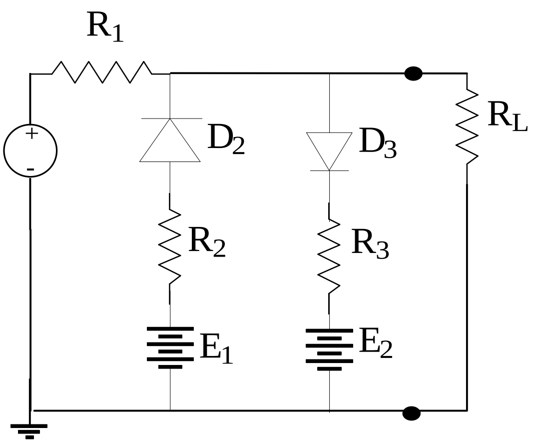
Adesso si tratta di capire quando questa situazione viene modificata man mano che la tensione in ingresso aumenta, ossia diventa meno negativa. E' chiaro che le cose possono cambiare solo nel momento in cui il diodo D_1 si accende. Ci chiediamo allora quando D_1 si può accendere: la tensione ai capi di D_1, fin quando esso è spento, vale $V_{D1} = V_{IN} - V_L$.; allora avendo prima trovato che, per V_{IN} piccola, la V_L si mantiene costante e pari a 3V, è chiaro che il diodo si accenderà non appena V_{IN}=3V, in quanto è in corrispondenza di questo valore della tensione in ingresso che la tensione ai capi di D_1 si annulla ed eventualmente prende a crescere.

Possiamo allora perfezionare quanto detto prima dicendo che *la tensione di uscita vale 3V fino a quando la tensione in ingresso, partendo da -¥, arriva a sua volta al valore 3V.*

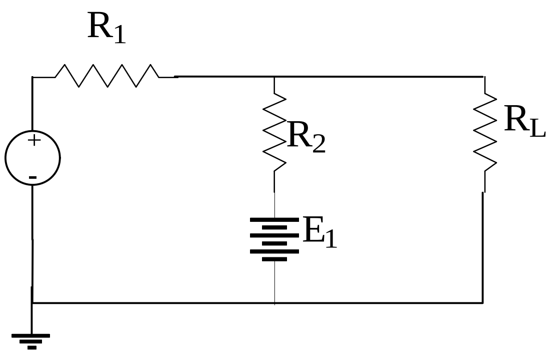
Da un punto di vista grafico, possiamo perciò cominciare a tracciare la caratteristica di trasferimento nel modo seguente:



Supponiamo, a questo punto, che la tensione in ingresso abbia superato il valore 3V e che quindi D_1 si sia acceso. Ciò significa che questo diodo si comporta adesso da cortocircuito, per cui possiamo cominciare a ridisegnare il circuito nel modo seguente:



Dobbiamo ancora una volta capire in che condizione si trovano adesso i diodi D_2 e D_3. Ragioniamo un momento su D_2: la tensione applicata all'anodo del diodo è E_1=6V diminuita della caduta di tensione su R_2; viceversa, la tensione applicata al catodo è V_{IN}=3V diminuita della caduta di tensione su R_1. E' ragionevole pensare, allora, che D_2 sia sottoposto ad una tensione positiva e cioè sia acceso. Per un motivo perfettamente analogo, anche se opposto, è ragionevole pensare, invece, che D_3 sia spento. Possiamo quindi ipotizzare, salvo a verificarlo dopo, che il circuito sia adesso il seguente:



Il calcolo della tensione di uscita può allora essere fatto applicando il principio della sovrapposizione degli effetti: passivando l'ingresso, abbiamo R_2 in serie al parallelo tra R_1 ed R_l, per cui la tensione su R_L risulta essere

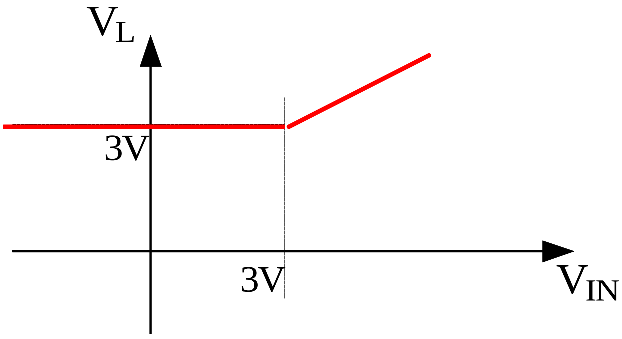
$$V'_L = \frac{(R_1 // R_L)E_1}{(R_1 // R_L) + R_2} = 1.5(V)$$

Passivando, invece, E1, abbiamo R_1 in serie al parallelo tra R_2 ed R_l, per cui la tensione su R_L risulta essere

$$V''_L = \frac{(R_2 // R_L)V_{IN}}{(R_2 // R_L) + R_1} = 0.5V_{IN}$$

per cui possiamo concludere che $V_L = 0.5V_{IN} + 1.5$.

Abbiamo dunque una dipendenza lineare, con pendenza pari a 0.5, della tensione di uscita dalla tensione in ingresso, per cui possiamo andare a perfezionare la caratteristica grafica prima tracciata:



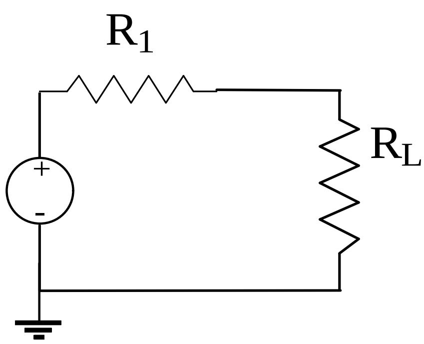
Dobbiamo adesso stabilire fino a quando permane la situazione. E' chiaro che D_1 rimarrà d'ora in poi sempre acceso, per cui le uniche due possibilità sono o che si spenga D_2 oppure che si accenda D_3. Quale delle due avviene prima? Si tratta di stabilire se fa prima la tensione su D_2 a diventare negativa o la tensione su D_3 a diventare positiva.

Dato che la tensione sul catodo di D_3 è pari a 20V, perché si abbia l'accensione di D_3 è necessario che la tensione di uscita arrivi a sua volta al valore 20V; al contrario, la tensione sull'anodo di D_2 è pari a poco meno di 6V, per cui la condizione perché si abbia lo spegnimento di D_2 è che la V_L arrivi all'incirca al valore 6V. Deduciamo perciò che lo spegnimento di D_2 avviene senz'altro prima dell'accensione di D_3.

Il valore della tensione di ingresso in corrispondenza del quale si ha l'accensione di D_2 si ricava facilmente: dato che V_L e V_{IN} sono adesso legate dalla relazione $V_L = 0.5V_{IN} + 1.5$, basta imporre che sia V_L=6V per ottenere che

$$V_{IN} = 2*(6-1.5) = 9V$$

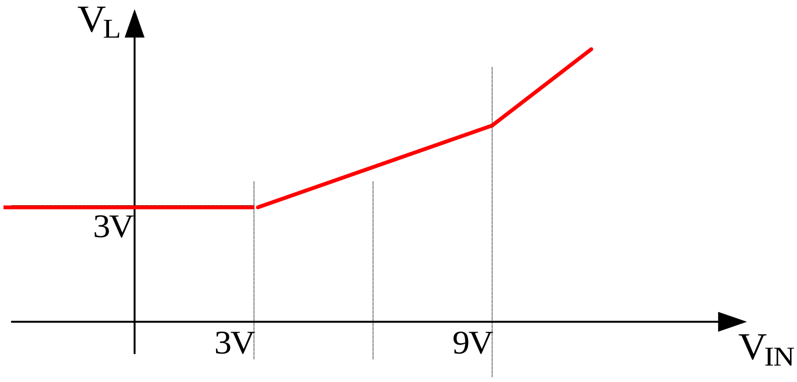
Quindi, quando la tensione di ingresso raggiunge il valore 9V, il diodo D_2 si spegne, mentre D_3 rimane spento e D_1 acceso. Il circuito, quindi, diventa il seguente:



I due resistori sono in serie, per cui la tensione in uscita vale adesso

$$V_L = \frac{R_L}{R_L + R_1} V_{IN} = 0.67V_{IN}$$

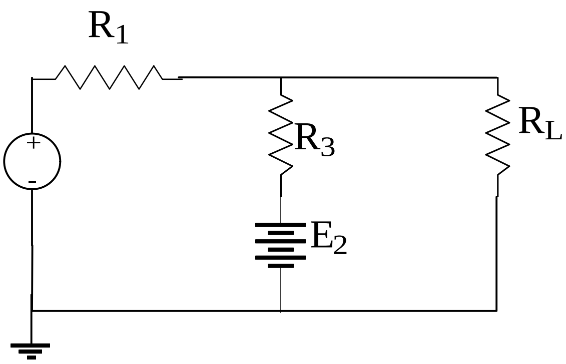
In pratica, rispetto alla situazione precedente, la dipendenza tra tensione di uscita e tensione di ingresso è sempre lineare, ma con una pendenza leggermente maggiore (in quanto si passa da 0.5 a 0.67):



Continuando ad aumentare la tensione ingresso, si arriva al momento in cui la tensione di uscita raggiunge i 20V: a questo punto, c'è l'accensione del diodo D_3.

Il valore della tensione in ingresso a partire dal quale D_3 risulta acceso si ottiene in modo analogo a prima, ossia imponendo che $20(V) = 0.67V_{IN}$: da qui si ricava che $V_{IN} = 29.8(V)$.

A partire da questo valore, se D_3 è acceso, il circuito diventa il seguente:



Il calcolo della tensione di uscita può essere fatto ancora una volta applicando il principio della sovrapposizione degli effetti:

- passivando l'ingresso, abbiamo R_3 in serie al parallelo tra R_1 ed R_L, per cui la tensione su R_L risulta essere

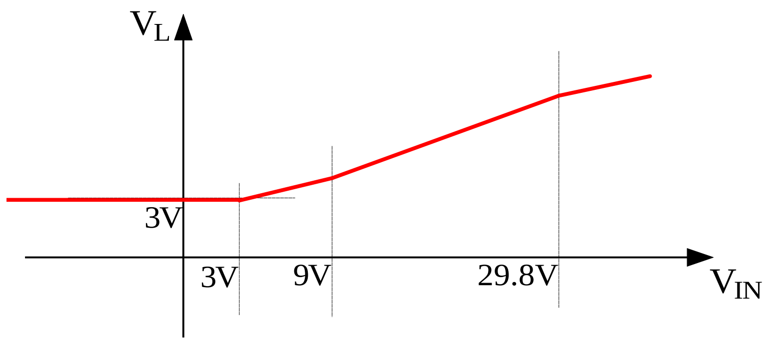
$$V'_L = \frac{(R_1 // R_L)E_1}{(R_1 // R_L) + R_3} = 1.5(V)$$

- passivando, invece, E_2, abbiamo R_1 in serie al parallelo tra R_3 ed R_L, per cui la tensione su R_L risulta essere

$$V''_L = \frac{(R_3 // R_L)V_{IN}}{(R_3 // R_L) + R_1} = 0.5V_{IN}$$

Possiamo concludere che $V_L = 0.5V_{IN} + 1.5$ e questo è lo stesso andamento che la tensione di uscita aveva nell'intervallo [3V,9V].

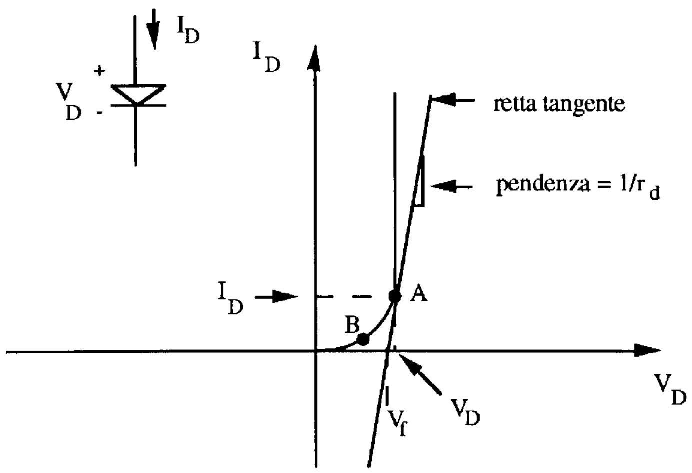
Possiamo dunque completare la caratteristica nel modo seguente:



E' chiaro che, per tensioni superiori a 29.8V, non cambia più nulla nel circuito.

APPROSSIMAZIONE LINEARE A TRATTI DELLE CARATTERISTICHE

La caratteristica corrente-tensione della maggior parte dei dispositivi non lineari può essere approssimata graficamente con una opportuna sequenza di tratti rettilinei. Consideriamo, ad esempio, una giunzione p-n portata a funzionare nel punto A indicato nella figura seguente:



La tangente alla curva I-V nel punto A attraversa l'asse delle tensioni nel punto V_f ed ha una pendenza costante:

$$\frac{dI_D}{dV_D} = \frac{1}{r_d}$$

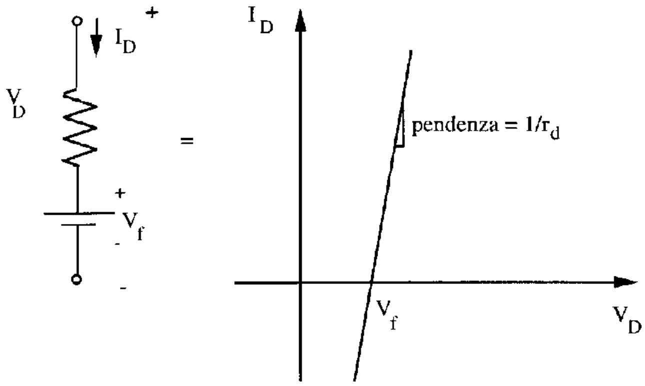
Il tratto "verticale" della caratteristica può quindi essere approssimato con un tratto rettilineo di equazione

$$V_D = V_f + I_D r_d = V_f + I_D \frac{dV_D}{dI_D}$$

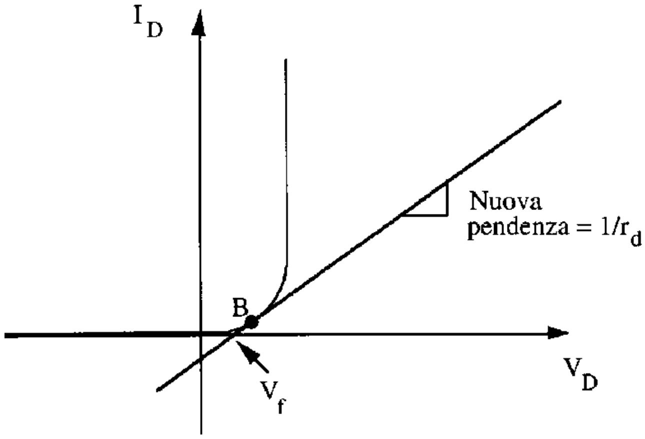
Considerando che la corrente del diodo è data dalla nota relazione $I_D \cong I_S e^{V_D/\eta V_T}$, possiamo dunque scrivere che

$$r_d = \frac{dV_D}{dI_D} \cong \frac{\eta V_T}{I_D^Q}$$

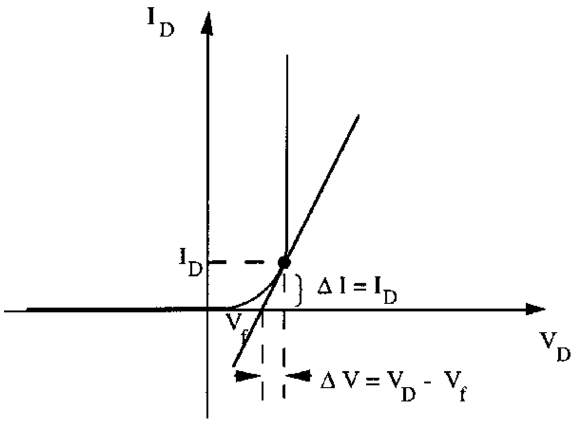
dove abbiamo indicato con I_D^Q la corrente che attraversa il diodo nel punto A di polarizzazione.



Naturalmente, se al posto di considerare il punto A, consideriamo il punto B (sempre con riferimento al grafico di prima), i parametri dell'equazione cambiano e l'approssimazione peggiora:



Resta infine da capire come si può determinare il valore di V_f. Se ne può fare una determinazione grafica, basata su quanto indicato nella figura seguente:



Applicando il significato analitico di rd, possiamo infatti scrivere che

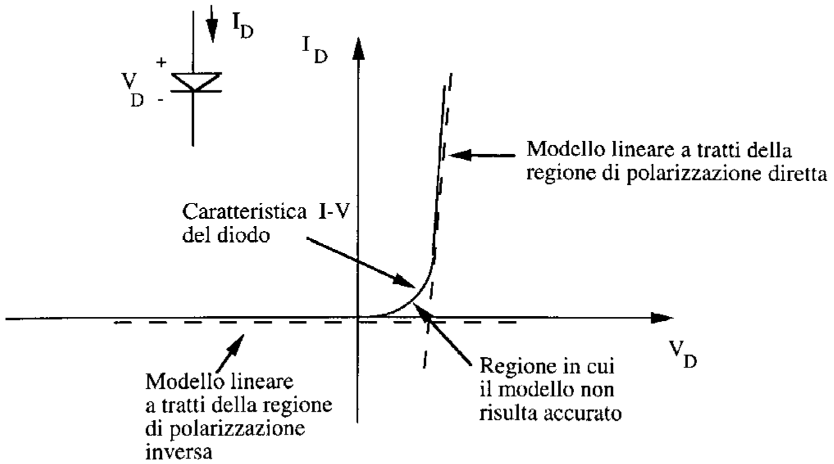
$$\frac{1}{r_d} = \frac{\Delta I}{\Delta V} = \frac{I_D}{V_D - V_f} \longrightarrow V_D - V_f = r_d I_D \longrightarrow V_f = V_D - r_d I_D$$

Considerando che $V_D = \eta V_T \ln\left(\frac{I_D}{I_S}+1\right)$, possiamo dunque concludere che

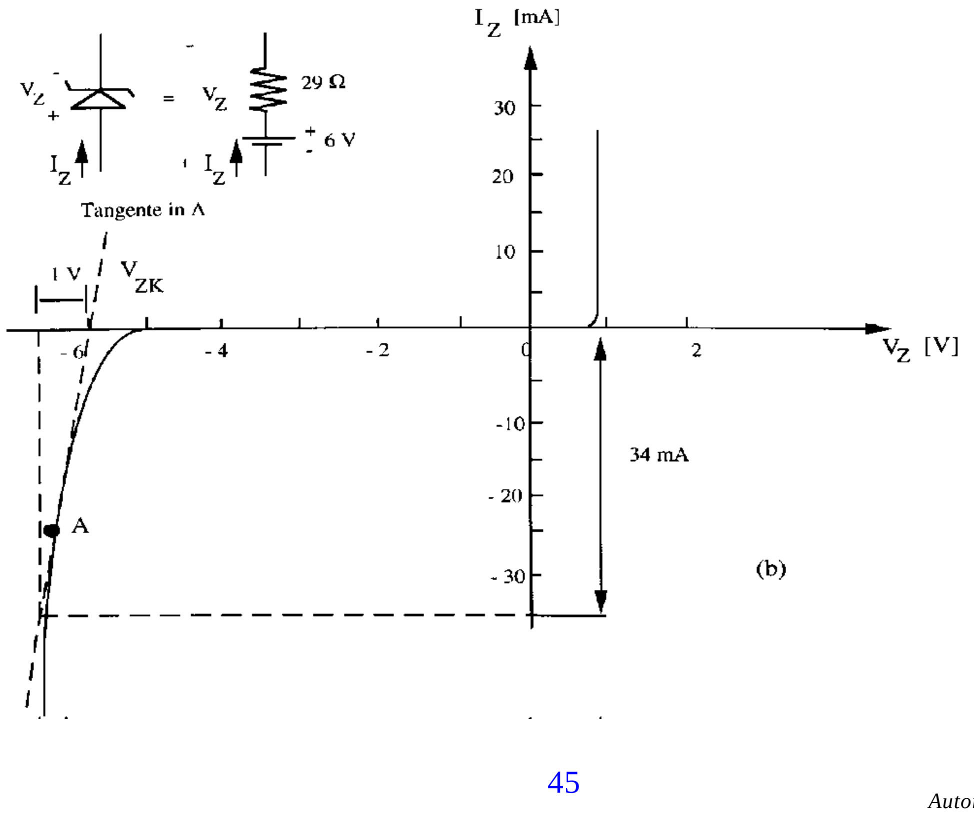
$$\boxed{V_f = \eta V_T \ln\left(\frac{I_D}{I_S}+1\right) - r_d I_D}$$

Abbiamo dunque concluso che, una volta noto il punto operativo del diodo, è possibile calcolare la r_d e la V_f e tali valori consentono di ben approssimare la caratteristica I-V del diodo stesso con due tratti rettilinei.

Questa approssimazione è buona salvo nel tratto $0<V_D<V_f$, dove invece le differenze con la caratteristica reale sono più marcate.



L'approssimazione lineare a pezzi (brevemente **PWL**, che sta per *Piece Wise Linear*) può essere estesa anche agli altri tipi di dispositivi non lineari con le stesse procedure. Ad esempio, il grafico seguente indica come è possibile effettuare l'approssimazione PWL della caratteristica di un diodo Zener:



Teoremi generali per i circuiti resistivi

TEOREMA 1

Dato un circuito resistivo, non lineare, risolvibile (che cioè ammette almeno un punto operativo), esiste sempre una caratteristica driving point per qualsiasi coppia di terminali.

TEOREMA 2

Dato un circuito resistivo, non lineare, risolvibile, esiste sempre una caratteristica ingresso-uscita tra ogni coppia di porte.

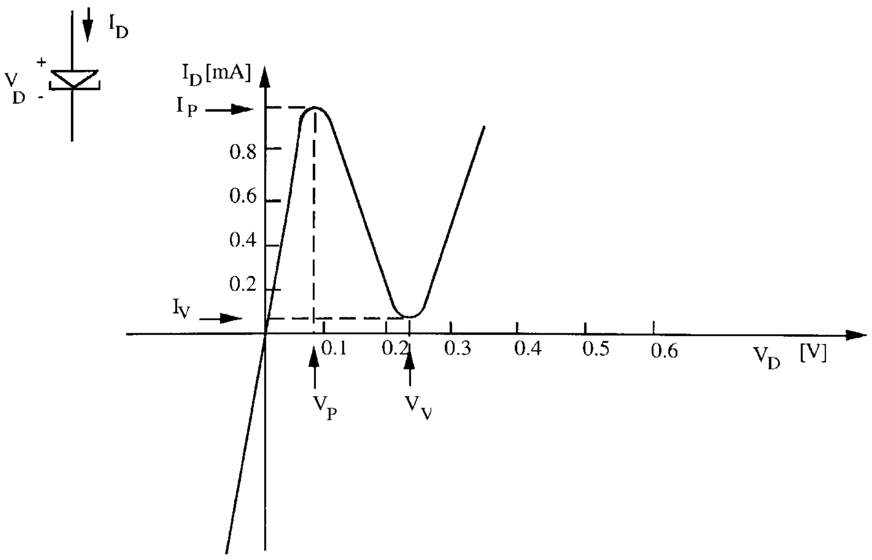
TEOREMA 3

Sia dato un circuito resistivo non lineare contenente solo elementi a 2 terminali, nell’ipotesi che ciascuno degli elementi a 2 terminali presenti una caratteristica I-V monotona crescente con V e nell’ipotesi che il circuito sia privo di maglie formate solo da generatori di tensione e sia privo di insiemi di taglio formati solo da generatori di corrente, sussistono i seguenti 3 risultati:

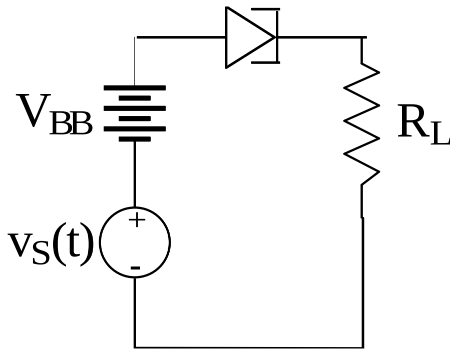
- *il circuito ha una sola soluzione;*
- *la caratteristica driving point ad ogni porta del circuito è monotona crescente:*
- *la pendenza, in ogni punto, delle caratteristiche statiche V_{IN}/V_{OUT}, per ogni coppia di porte, non può superare i 45° (il che significa che non si possono avere amplificazioni di tensione).*

Conseguenza: caso del diodo tunnel

In base a questo teorema, deduciamo che è possibile produrre una amplificazione di tensione in un circuito che contenga anche solo un elemento a due terminali con una caratteristica corrente-tensione che non sia monotona crescente; un tipico elementi che soddisfa a questa condizione è il diodo tunnel, la cui caratteristica è notoriamente la seguente:

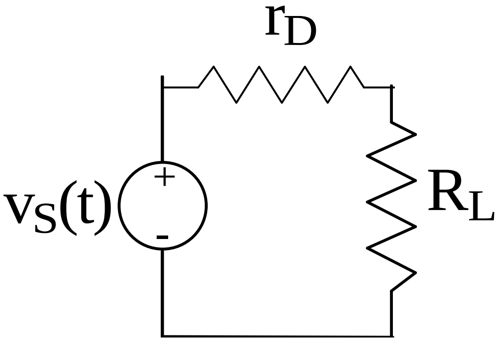


Per esempio, verifichiamo se è possibile ottenere una amplificazione di tensione mediante un circuito del tipo seguente:



In questo circuito, abbiamo un generatore di tensione continua V_{BB} il cui scopo fondamentale è quello di polarizzare il diodo nel punto di lavoro desiderato. Alla tensione applicata da questo generatore si sovrappone un generatore piccolo segnale $v_S(t)$ che noi intendiamo amplificare ai capi del carico R_L.

La prima cosa da fare è dunque polarizzare il diodo nel punto di lavoro desiderato; proviamo ad esempio a scegliere un punto di lavoro che si trovi sul tratto della curva I-V con pendenza negativa: se operiamo la solita *linearizzazione a tratti* della caratteristica del diodo, possiamo sostituire la serie tra il diodo stesso e V_{BB} con un resistore di resistenza r_D pari alla resistenza di conduzione del diodo. Il circuito diventa dunque il seguente:



A questo punto, la tensione ai capi del carico è chiaramente

$$v_L(t) = \frac{R_L}{r_D + R_L} v_S(t)$$

e risulta effettivamente maggiore di $v_S(t)$ in quanto la resistenza di conduzione r_D del diodo è negativa.

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: http://users.iol.it/sandry
succursale: http://digilander.iol.it/sandry1