

# Appunti di Elettronica Applicata

## Capitolo 13 - Parte I

### Comportamento dinamico

Introduzione .....	1
Risposta armonica tipica.....	4
Frequenza di transizione e frequenza di taglio di un BJT.....	7
Frequenza di transizione e frequenza di taglio di un FET .....	10
Analisi ad alta frequenza degli stadi elementari .....	12
Funzione di trasferimento di un circuito .....	12
Stadio ad emettitore comune.....	13
<i>Effetto Miller sulla capacità <math>C_m</math></i> .....	17
<i>Esempio</i> .....	18
stadio a source comune.....	20
stadio inseguitore di tensione.....	22
stadio inseguitore di corrente.....	25
Stadio cascode .....	28
Determinazione sperimentale delle frequenze di taglio .....	29
<i>Sistemi con due poli nella funzione di trasferimento</i> .....	32
Frequenza di taglio superiore e coefficienti della funzione di risposta armonica	34

## INTRODUZIONE

Lo studio dei circuiti impiegati negli amplificatori è stato condotto, fino a questo momento, da un punto di vista puramente “*a-dinamico*” o, come si dice spesso, con riferimento ad un **modello resistivo della rete**. *Ciò presuppone che la gamma di frequenze dei segnali che vengono elaborati da tali circuiti sia tale da ritenere trascurabili i contributi degli elementi dinamici (per lo più capacitivi) intrinsecamente presenti nei dispositivi attivi.* I risultati delle analisi fin qui svolte sono validi in un “intervallo di frequenze intermedie”, cioè non troppo basse da rendere sensibile il contributo dei condensatori di disaccoppiamento e by-pass eventualmente presenti, e non troppo alte da rendere apprezzabile il contributo delle capacità intrinseche dei dispositivi attivi. Per un amplificatore, questo intervallo di frequenze intermedie, peraltro variabili da caso a caso, prende il nome di “**centro banda**”.

In generale, non si può pensare di effettuare lo studio dei sistemi dinamici per via analitica, poiché ad essi si associa sempre un modello matematico molto complesso da gestire, che può essere manipolato solo con l’ausilio del calcolatore. E’ possibile, però, studiare il comportamento dei circuiti in regime di piccolo segnale nell’intorno del proprio punto di lavoro (così come abbiamo sempre fatto in precedenza), poiché in questo caso l’analisi si riconduce a quella di un sistema lineare e comporta una approssimazione tanto più valida quanto più lineare è il comportamento del circuito.

*Un sistema dinamico lineare viene completamente caratterizzato dalla sua **funzione di trasferimento** oppure, se si è interessati solo al comportamento a regime, dalla **funzione di risposta armonica**.* Quindi, in

generale, per descrivere un circuito con i suoi effetti dinamici bisogna cercare di determinare queste funzioni.

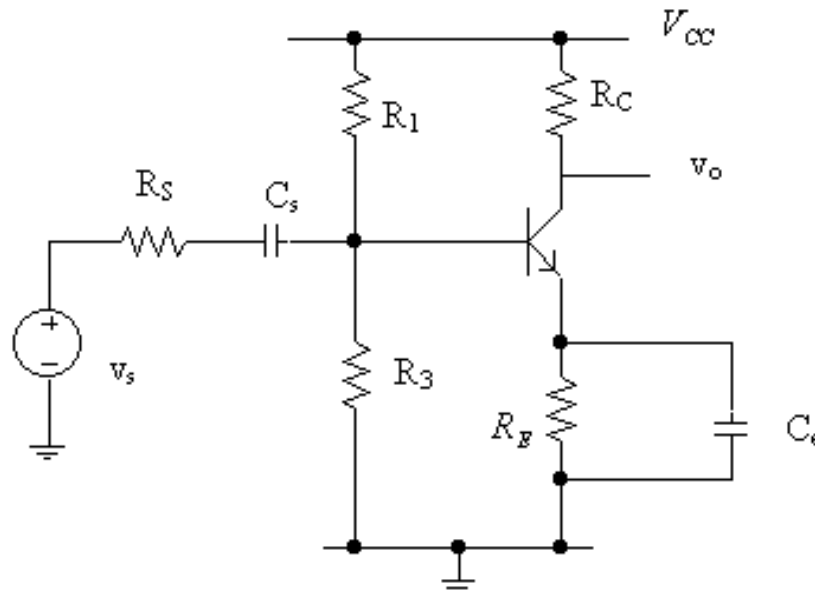
Noi siamo interessati prevalentemente allo studio degli amplificatori e degli oscillatori, per cui l'analisi verrà particolarizzata a questi circuiti, al fine di fornire gli strumenti che ne consentano un corretto dimensionamento.

Ci occupiamo inizialmente degli amplificatori, al fine soprattutto di caratterizzarne la tipica funzione di risposta armonica; nel capitolo successivo ci occuperemo invece dei problemi relativi alla stabilità e dei criteri per ottenere una risposta accettabile.

Nella progettazione di un amplificatore si richiede, ad esempio, di avere il guadagno  $v_o/v_i$  costante in un dato intervallo di frequenze. Ad esempio in un amplificatore audio da 20Hz a 20kHz, mentre in un amplificatore video da 100kHz a 6MHz.

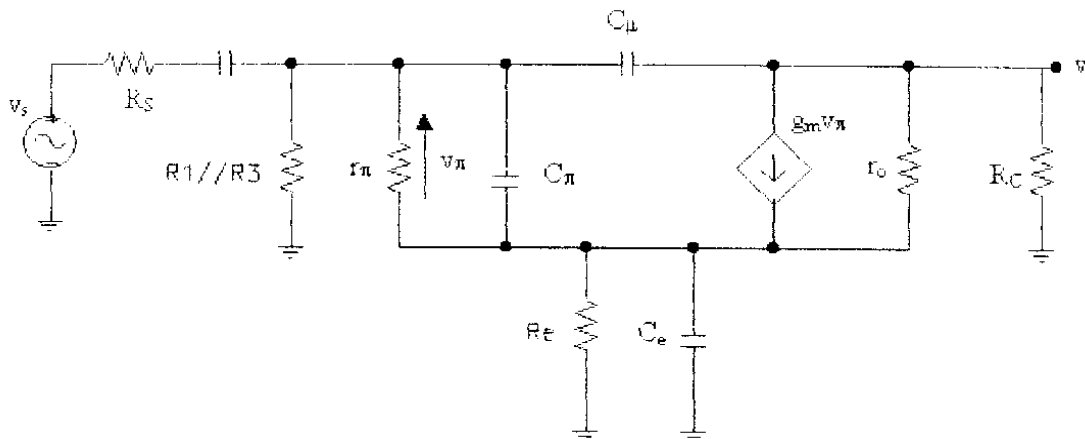
*Finché questo intervallo di frequenze è non troppo ampio (qualche decade), le capacità non influenzano la distribuzione delle correnti e delle tensioni.* In questa gamma di frequenze è applicabile il modello lineare a  $\pi$  (o quello a parametri h) senza elementi reattivi, o meglio, in cui le capacità sono circuiti aperti. Per quanto riguarda la rete esterna, i condensatori di disaccoppiamento sono sostituiti da cortocircuiti.

Consideriamo subito un esempio:



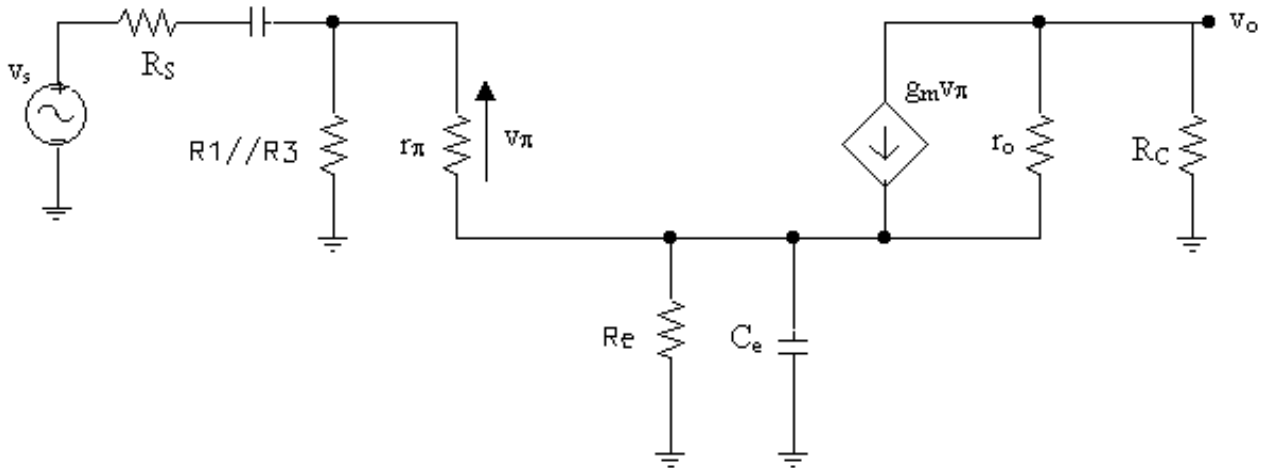
Per svolgere un'analisi completa del comportamento in frequenza di questo circuito, in regime di piccolo segnale, dobbiamo usare il modello incrementale del circuito, nel quale vanno inclusi non solo i condensatori esterni (che finora erano sempre stati cortocircuitati) ma anche gli effetti capacitivi più significativi associati ai dispositivi previsti nel modello a  $\pi$ .

Il circuito equivalente risulta:



E' possibile individuare dei range di frequenza entro i quali questo circuito può essere semplificato: per farlo, basta ricordare che *gli ordini di grandezza dei condensatori esterni di disaccoppiamento e di bypass (nF) e delle capacità fisiche interne al dispositivo attivo (pF) sono estremamente diversi. Questo comporta che, a bassa frequenza, i condensatori esterni non si possano trascurare, mentre invece le capacità dei transistor si possono considerare dei circuiti aperti.*

In base a queste considerazioni, il circuito per piccoli segnali, a bassa frequenza, può essere modificato nel modo seguente:

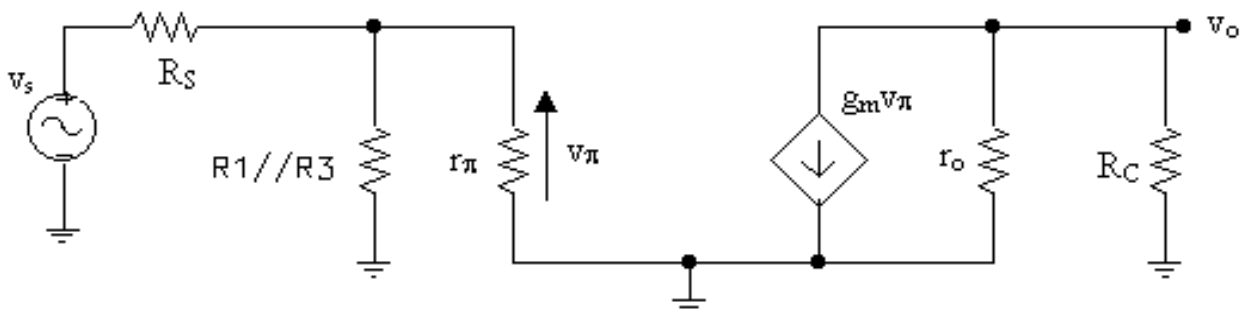


Se supponiamo di trovarci a 1kHz e se la  $C_\pi$  vale 1pF, allora l'impedenza associata a tale capacità vale

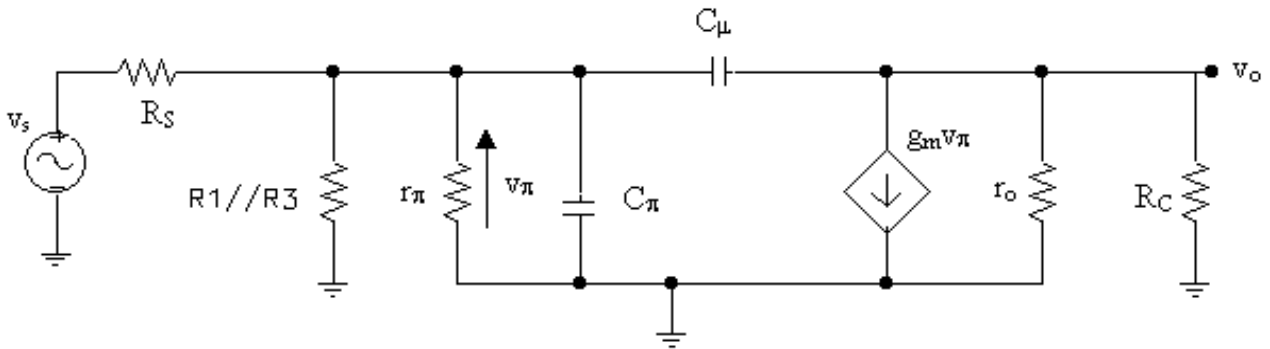
$$X_{C_\pi} = \frac{1}{2\pi \cdot f \cdot C_\pi} = \frac{1}{6,28 \cdot 10^3 \cdot 10^{-12}} = \frac{10^9}{6,28} \cong 160\text{M}\Omega$$

Un valore così alto dell'impedenza mostra, quindi, che per frequenze minori di 1kHz le capacità intrinseche dei transistor possano essere considerate dei circuiti aperti.

A centro banda, i condensatori esterni si possono considerare dei cortocircuiti, mentre le capacità dei transistor sono ancora approssimabili con dei circuiti aperti. Il circuito equivalente si riduce a:



Alle alte frequenze, infine, i condensatori esterni sono assimilabili a cortocircuiti, mentre assumono una rilevanza notevole le capacità intrinseche dei dispositivi attivi. In questo caso il circuito si riduce a:



Se supponiamo di trovarci a 1kHz e se la  $C_\pi$  vale  $1\mu\text{F}$  allora l'impedenza della capacità vale :

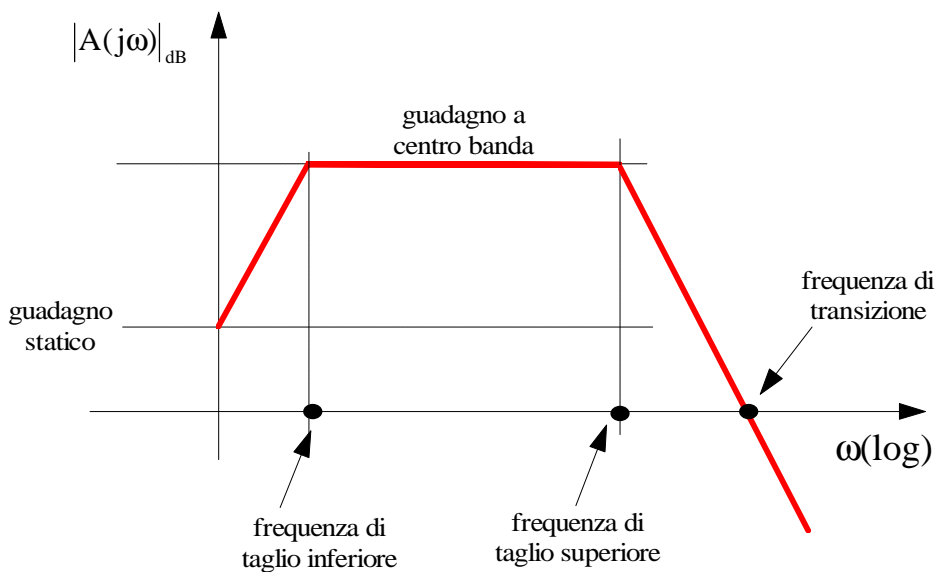
$$X_{C_\pi} = \frac{1}{2\pi \cdot f \cdot C_\pi} = \frac{1}{6,28 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6}} = \frac{10^3}{6,28} \cong 160\Omega$$

Un valore così basso dell'impedenza mostra quindi che per frequenze maggiori di 1kHz le capacità esterne dei transistor possano essere considerate dei cortocircuiti.

Riassumendo, possiamo dire quanto segue: *mentre nel range delle frequenze medie si può utilizzare un modello per piccoli segnali puramente resistivo (modello a centro banda), alle basse frequenze il comportamento dello stadio è dominato dai condensatori esterni e alle alte frequenze il comportamento è invece influenzato dalle capacità intrinseche dei transistor.*

### RISPOSTA ARMONICA TIPICA

La grandezza di cui si vuole determinare il comportamento al variare della frequenza è di solito il modulo del guadagno dello stadio di amplificazione, poiché la fase, almeno per applicazioni audio, ha scarsa rilevanza ai fini dell'utilizzatore. Per un amplificatore, l'andamento del modulo del guadagno al variare della frequenza risulta in genere di questo tipo:



N.B. Nel diagramma appena tracciato, l'asse delle ascisse riporta direttamente i valori della pulsazione  $\omega$ , usando però una scala logaritmica e non una scala lineare.

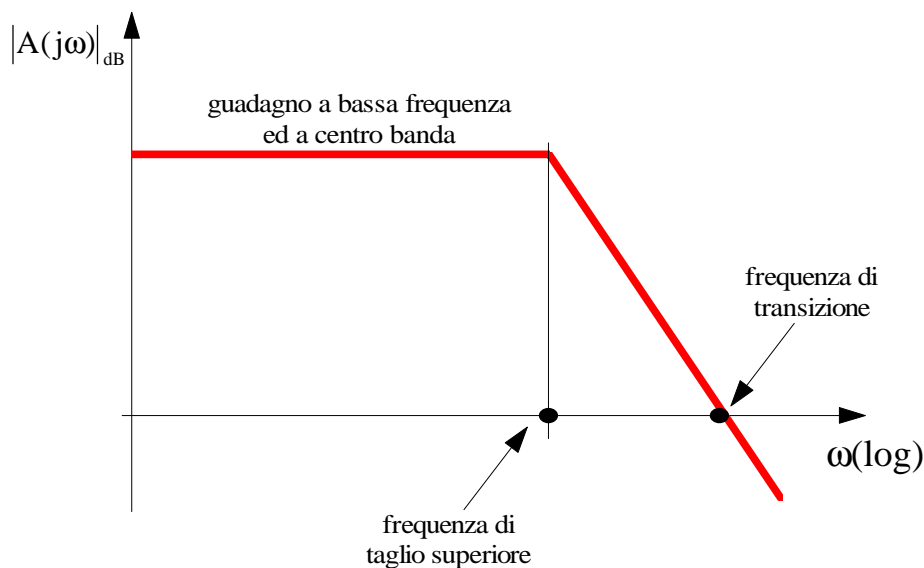
I condensatori esterni filtrano la continua e le componenti a bassa frequenza, mentre a centro banda, non essendoci reattanze, il guadagno si mantiene costante; ad alta frequenza le capacità dei transistor tendono a cortocircuitare l'ingresso e quindi il guadagno tende a diminuire.

Si individuano perciò tre distinte regioni:

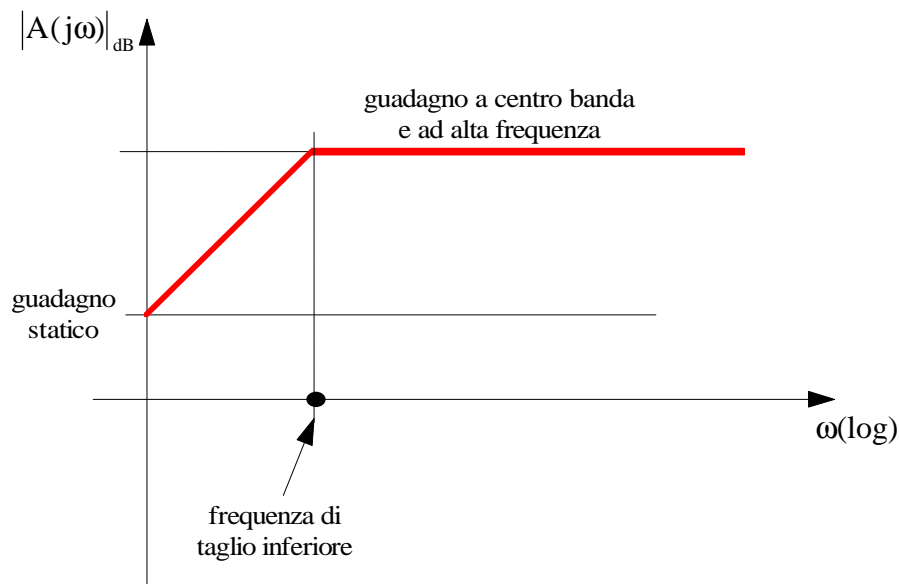
- una regione a *bassa frequenza*, caratterizzata dagli effetti capacitivi legati alle capacità di disaccoppiamento e di bypass presenti nel circuito (e di valore generalmente elevato), nella quale si individuano fondamentalmente 2 cose: uno o più **zeri a bassa frequenza** e una **frequenza di taglio inferiore** (definita come la frequenza alla quale  $|A(j\omega)|_{dB}$  è 3dB al di sotto del valore di centro banda);
- una regione ad *alta frequenza*, caratterizzata dagli effetti capacitivi legati tipicamente alle capacità intrinseche dei dispositivi, nella quale si distinguono essenzialmente la **frequenza di taglio superiore** (definita anch'essa come la frequenza alla quale  $|A(j\omega)|_{dB}$  è 3dB al di sotto del valore di centro banda) e la **frequenza di transizione** (definita come la frequenza alla quale  $|A(j\omega)|$  è unitario);
- una regione a *centro banda*, nella quale tutti gli effetti capacitivi sono trascurabili ed il circuito si comporta, sotto segnale, come un circuito puramente resistivo con un certo **guadagno a centro banda**.

Lo scopo principale della nostra analisi sarà determinare il valore delle due frequenze di taglio, in quanto esse rappresentano due specifiche fondamentali nel progetto degli amplificatori.

E' anche opportuno osservare che *nei circuiti integrati non vengono mai usate le capacità di bypass e quelle di disaccoppiamento, il che comporta evidentemente che in tali circuiti sia praticamente inesistente il fenomeno del taglio in bassa frequenza:*



In modo analogo, capita spesso di dover risolvere problemi nei quali non si hanno a disposizione dei dati sugli effetti capacitivi intrinseci ai dispositivi: in questi casi, è lecito assumere che questi effetti siano trascurabili, il che equivale a ritenere  $\omega_h \rightarrow \infty$ , ossia equivale a trascurare il taglio in alta frequenza:



Talvolta, la risposta armonica dei circuiti può presentare un **picco ad alta frequenza**, cioè un aumento, più o meno pronunciato, del guadagno prima della diminuzione progressiva che comincia a partire da  $\omega_h$ . Vedremo in seguito quali parametri influenzano tale picco, che spesso è deleterio, per cui va ridotto o eliminato del tutto, ma talvolta viene anche opportunamente sfruttato (come ad esempio nei cosiddetti *circuiti di pre-enfasi*).

Infine, osserviamo che, in corrispondenza delle frequenze di taglio, il guadagno di potenza dello stadio, essendo proporzionale al quadrato del guadagno del circuito, risulta dimezzato rispetto al valore a centro banda. Note le frequenze di taglio, sarà dunque possibile determinare il range di frequenze entro il quale il guadagno dell'amplificatore si mantiene entro valori compatibili con le specifiche di progetto.

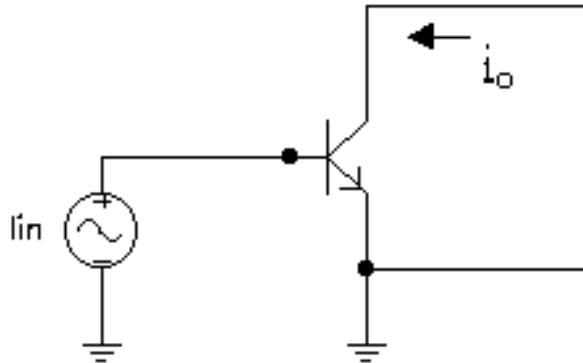
Fatte queste premesse generali, ci occuperemo adesso di definire le metodologie utili a caratterizzare il comportamento ad alta e bassa frequenza ed in particolare i metodi per individuare le frequenze di taglio. In particolare, esamineremo prima il comportamento ad alta frequenza. Per fare questo, è necessario definire preventivamente i modelli dei singoli dispositivi in queste condizioni di funzionamento.

Se si considerano più stadi di amplificazione in cascata (di cui si conoscono le singole funzioni di risposta armonica) è interessante ricavare la funzione di risposta armonica dell'intero amplificatore. Se gli stadi sono dimensionati in modo che essi non vengano caricati dallo stadio successivo, allora la funzione di risposta armonica dell'intero amplificatore può essere ottenuta moltiplicando le funzioni di risposta armonica degli stadi. È interessante notare che la funzione risultante ha sempre una banda più stretta delle bande delle funzioni dei singoli stadi; si potrebbe dire che la banda risultante è l'intersezione delle bande delle singole funzioni. Però, anche nel caso di stadi aventi la stessa banda, la funzione risultante si ritrova con una banda più stretta, poiché al di là delle frequenze di taglio la funzione decresce più rapidamente e quindi se si tralasciano i diagrammi asintotici e si passa a quelli effettivi si evidenzia un'ulteriore riduzione di banda.

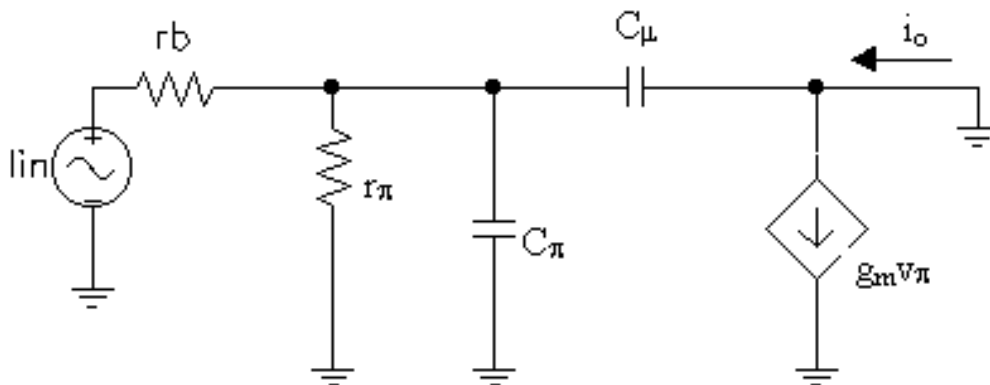
## FREQUENZA DI TRANSIZIONE E FREQUENZA DI TAGLIO DI UN BJT

Le prestazioni in alta frequenza di un transistor bipolare sono molto sintetizzate in pratica dalla *massima frequenza di funzionamento del dispositivo come amplificatore*, intesa come la frequenza alla quale diventa unitario il guadagno di corrente di cortocircuito nella configurazione ad emettitore comune: a tale frequenza si dà il nome di **frequenza di transizione** o anche *frequenza di crossover* (indicata con  $f_T$ , cui corrisponde una *pulsazione di transizione*  $\omega_T=2\pi f_T$ ). Determiniamo allora l'espressione di tale frequenza.

Il valore di  $f_T$  può essere calcolato (o misurato) usando il transistor bipolare nella configurazione indicata nella figura seguente (riferita, ovviamente, solo ai piccoli segnali, mentre la polarizzazione viene data per scontata):



In base a questo schema, si tratta semplicemente di applicare alla base del transistor una piccola corrente di segnale  $i_{in}$  e di misurare la corrente di uscita  $i_o$  con il collettore cortocircuitato (rispetto ovviamente ai soli segnali). Si può costruire, per questa situazione, un circuito equivalente per piccoli segnali del tipo seguente:



Questo è ancora il modello a  $\pi$ , ma con in più gli effetti capacitivi dovuti alle capacità intrinseche  $C_\pi$  e  $C_\mu$ . In particolare, essendo il BJT polarizzato in zona attiva diretta, la  $C_\pi$  è sostanzialmente data dalla capacità di diffusione della giunzione tra la base e l'emettitore:

$$C_\pi \cong C_D = \frac{\partial Q_f}{\partial V_{BE}} = \frac{\partial (I_C \cdot \tau_F)}{\partial V_{BE}} = \tau_F \cdot g_m$$

Ci interessa calcolare il rapporto tra la corrente di ingresso e quella di uscita:  $\beta(s) = \frac{i_o}{i_{in}}(s)$ .

Se consideriamo l'equilibrio delle correnti sul collettore, ricordando che un condensatore ha ammettenza pari a  $sC_\mu$ , si ha

$$i_o = g_m \cdot v_\pi - s \cdot C_\mu v_\pi = v_\pi \cdot (g_m - s \cdot C_\mu)$$

In ingresso si ha inoltre che

$$i_s = v_\pi [g_\pi + s \cdot (C_\pi + C_\mu)]$$

Allora, il rapporto tra  $i_s$  e  $i_o$  risulta essere il seguente:

$$\frac{i_o}{i_s}(s) = \beta(s) = \frac{g_m - s \cdot C_\mu}{g_\pi + s \cdot (C_\pi + C_\mu)}$$

Questa funzione presenta evidentemente uno zero reale positivo in  $z = \frac{g_m}{C_\mu}$  ed un polo reale negativo in  $p = \frac{-g_\pi}{C_\pi + C_\mu}$ . Possiamo facilmente verificare che il modulo del polo (cioè la frequenza del polo) è molto minore del modulo dello zero (cioè la frequenza dello zero):

$$|p| = \frac{g_\pi}{C_\pi + C_\mu} = \frac{\frac{g_m}{\beta_0}}{C_\pi + C_\mu} = \frac{\frac{g_m}{\beta_0} C_\mu}{C_\pi + C_\mu} = \frac{g_m}{C_\mu} \frac{\beta_0}{C_\pi + C_\mu} = |z| \cdot \frac{C_\mu}{C_\pi + C_\mu} \frac{1}{\beta_0}$$

Dato che il coefficiente  $\frac{C_\mu}{C_\pi + C_\mu} \frac{1}{\beta_0}$  è molto minore di 1, deduciamo che  $|p| \ll |z|$ .

Se lo zero si trova a una frequenza nettamente maggiore rispetto alla frequenza del polo, possiamo trascurarlo, in modo da esprimere il guadagno nella forma

$$\beta(s) \cong \frac{g_m}{g_\pi + s \cdot (C_\pi + C_\mu)} = \frac{\frac{g_m}{g_\pi}}{1 + \frac{s \cdot (C_\pi + C_\mu)}{g_\pi}} = \frac{\beta_0}{1 - \frac{s}{s_p}}$$

La funzione di risposta armonica si ottiene dalla funzione di trasferimento sostituendo alla frequenza complessa  $s$  la frequenza reale  $j\omega$  :

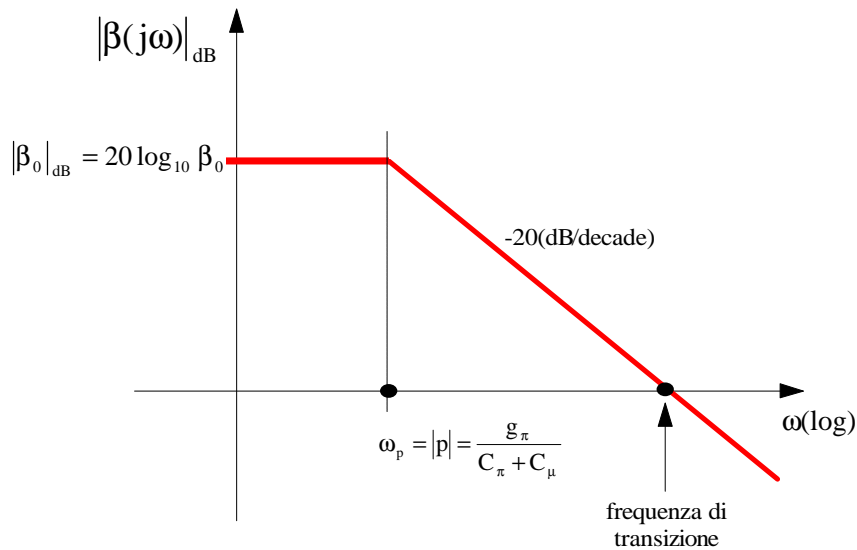
$$\beta(j\omega) = \frac{\beta_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_p}}$$

dove abbiamo ovviamente posto  $\omega_p = \frac{g_\pi}{C_\pi + C_\mu}$ .

In base a questa relazione, l'andamento di  $\beta(j\omega)$  in funzione di  $\omega$  si può descrivere comodamente mediante un diagramma di Bode del modulo di  $\beta(j\omega)$ : tenendo conto che quella relazione indica la



presenza di un termine costante  $\beta_0$  e di un termine (a denominatore) elementare del primo ordine, il diagramma di Bode del modulo di  $\beta(j\omega)$  è fatto nel modo seguente:



Analiticamente, il modulo di  $\beta(j\omega)$  risulta essere

$$|\beta(j\omega)| = \frac{\beta_0}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_p^2}}}$$

Si vede facilmente che, per  $\omega = \omega_p$ , il modulo del guadagno di corrente si riduce di un fattore pari a  $1/\sqrt{2}$  e quindi la  $\omega_p$  (cioè la frequenza del polo di  $B(j\omega)$ ) prende anche il significato di *frequenza a meno 3 dB* o anche **frequenza di taglio** e la si indica con  $\omega_{-3dB}$ .

A questo punto, avendo detto che la **frequenza di transizione** è definita come la frequenza alla quale  $\beta(j\omega)$  diventa unitario, per calcolarla dobbiamo semplicemente determinare il valore di  $\omega$  in corrispondenza del quale risulta  $|\beta(j\omega)| = 1$ :

$$1 = \frac{\beta_0}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{\omega_p^2}}} \longrightarrow \frac{\omega^2}{\omega_p^2} \cong \beta_0^2 \longrightarrow \omega_T = \omega_p \cdot \beta_0 = \frac{\beta_0 g_\pi}{C_\pi + C_\mu} = \frac{g_m}{C_\pi + C_\mu} \longrightarrow \boxed{f_T = \frac{g_m}{2\pi \cdot (C_\pi + C_\mu)}}$$

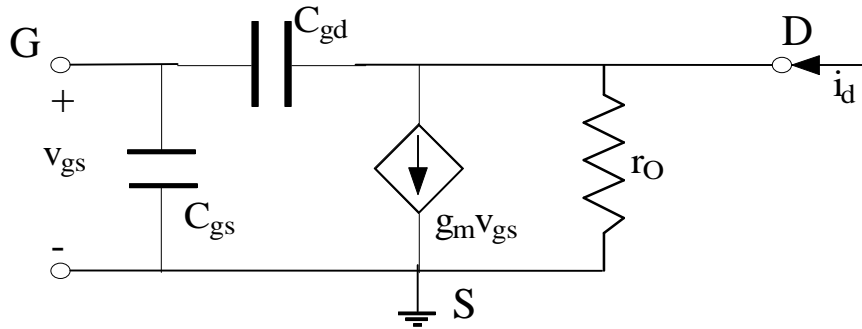
Da ciò è evidente che, aumentando la corrente di polarizzazione  $I_C$ , il transistor diventa più veloce, in quanto  $g_m = I_C/V_T$  aumenta e quindi aumenta anche  $f_T$ ; se  $C_\pi \gg C_\mu$ , si ha che  $f_T \cong \frac{1}{\tau_F}$ .

L'espressione appena ricavata per  $\omega_T$  è importante, tra le altre cose, perchè ci consente di osservare che  $\omega_T$  è abbastanza più grande rispetto alla pulsazione  $\omega_p$  del polo di  $\beta(s)$  e abbastanza più piccola della pulsazione  $\omega_Z$  dello zero di  $\beta(s)$  che abbiamo deciso di trascurare. Il fatto che risulti  $\omega_T \ll \omega_Z$  ci conferma che è stato lecito trascurare lo zero di  $\beta(s)$ , in quanto esso dà un contributo solo a partire da una frequenza  $\omega_Z$  superiore alla massima frequenza ( $\omega_T$ ) per la quale può essere ritenuto valido il modello del BJT. *Si dice, allora, che questo zero è fuori banda.*

## FREQUENZA DI TRANSIZIONE E FREQUENZA DI TAGLIO DI UN FET

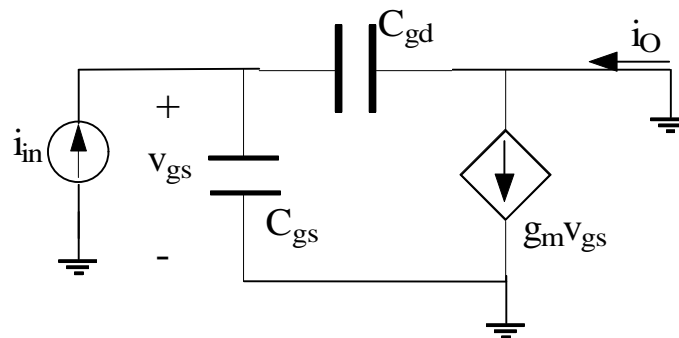
Così come abbiamo definito una frequenza di transizione ed una frequenza di taglio per un transistor bipolare, possiamo dare le stesse definizioni per un transistor ad effetto di campo, sia esso un MOSFET o un JFET.

Cominciamo col ricordare che il circuito equivalente per piccoli segnali di un FET nella configurazione a source comune è del tipo seguente:



Sono state incluse, nel modello, le due capacità intrinseche situate, rispettivamente, tra gate e drain ( $C_{gd}$ ) e tra gate e source ( $C_{gs}$ ). Ci sarebbe anche un'altra capacità posta tra il drain e source, ma risulta quasi sempre trascurabile, per cui non sarà mai considerata nei nostri discorsi. Così facendo, si nota che il modello incrementale del FET a source comune è assolutamente identico a quello del BJT ad emettitore comune, salvo il fatto che la resistenza di ingresso è infinita nel FET e pari a  $r_{\pi}$  nel BJT: questa uguaglianza consente quindi di ripetere per i FET quasi le stesse considerazioni fatte per i BJT.

Al fine di determinare la frequenza di transizione di un FET, dobbiamo utilizzare una configurazione circuitale assolutamente analoga a quella usata per il BJT, per cui dobbiamo porre il drain a massa (in modo da cortocircuitare la  $r_O$ ), eccitare il circuito con una certa corrente  $i_{in}$  e valutare la frequenza alla quale il guadagno di corrente  $i_O/i_{in}$  diventa unitario:



Ci interessa dunque calcolare il rapporto  $\frac{i_O}{i_{in}}(s)$  tra la corrente di ingresso e quella di uscita.

Possiamo intanto scrivere quanto segue:

$$i_o = g_m \cdot v_{gs} - s \cdot C_{gd} \cdot v_{gs} \quad \text{per il nodo d'uscita}$$

$$i_s = v_{gs} \cdot s \cdot (C_{gs} + C_{gd}) \quad \text{per il nodo d'ingresso}$$

Allora il rapporto tra la corrente d'uscita e quella d'ingresso vale

$$\frac{i_O}{i_S}(s) = \frac{g_m - s \cdot C_{gd}}{s \cdot (C_{gs} + C_{gd})}$$

E' ovvio che questa espressione sia del tutto analoga a quella trovata per il  $\beta(s)$  di un bipolare: la differenza è che, nel BJT, compare a denominatore un termine additivo  $1/r_\pi$  che nel FET diventa nullo in quanto la resistenza di ingresso è infinita.

Questa funzione presenta dunque uno zero reale positivo in  $z = \frac{g_m}{C_{gd}}$  ed un **polo nell'origine**.

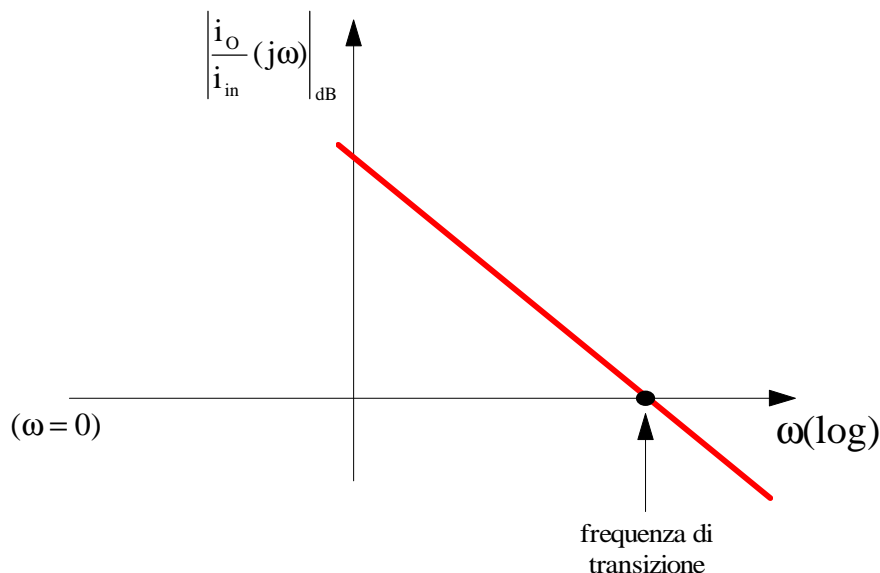
Ponendo adesso  $s=j\omega$  al fine di evidenziare la dipendenza del guadagno dalla frequenza, si ottiene

$$\frac{i_O}{i_{in}}(j\omega) = \frac{g_m - j\omega C_{gd}}{(C_{gs} + C_{gd})j\omega}$$

L'andamento di questo guadagno in funzione di  $\omega$  si può descrivere mediante il diagramma di Bode del suo modulo: ponendo il rapporto nella forma

$$\frac{i_O}{i_{in}}(j\omega) = \frac{1}{j\omega} \frac{1 - j\omega \frac{C_{gd}}{g_m}}{\left( \frac{C_{gs} + C_{gd}}{g_m} \right)}$$

si deduce che il diagramma di Bode è fatto nel modo seguente:



A questo punto, calcoliamo la pulsazione di transizione  $\omega_T$ , definita ancora una volta come la frequenza alla quale  $\left| \frac{i_O}{i_{in}}(j\omega) \right|$  diventa unitario: facciamo allora l'ipotesi iniziale che lo zero del

guadagno di corrente si trovi fuori banda, ossia al di là della frequenza di transizione che intendiamo calcolare; ciò significa che possiamo riscrivere il guadagno nella forma approssimata

$$\frac{i_o}{i_{in}}(j\omega) = \frac{1}{j\omega \left( \frac{C_{gs} + C_{gd}}{g_m} \right)}$$

da cui si deduce immediatamente, imponendo che il corrispondente modulo diventi unitario in corrispondenza di  $\omega_T$ , che

$$\omega_T = \frac{g_m}{C_{gd} + C_{gs}} \longrightarrow f_T = \frac{\omega_T}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{g_m}{C_{gd} + C_{gs}}$$

Si tratta di una espressione ancora una volta formalmente identica a quella trovata per il BJT.

Essa evidenzia, tra l'altro, la bontà dell'approssimazione di considerare lo zero  $z = \frac{g_m}{C_{gd}}$  fuori

banda, in quanto è evidente che la frequenza dello zero è sicuramente superiore alla frequenza di transizione.

A differenza dei BJT, in questo caso non si può parlare di frequenza di taglio. In entrambi i casi, è comunque la frequenza di transizione che caratterizza principalmente il comportamento in frequenza, indicando le massime prestazioni che il singolo transistor può raggiungere, definendo il punto oltre il quale il guadagno di corrente diventa minore di 1.

E' anche importante evidenziare che, come vedremo nel seguito, un qualsiasi circuito limita ulteriormente le prestazioni di un transistor a causa degli ulteriori effetti capacitivi che il circuito stesso introduce.

## Analisi ad alta frequenza degli stadi elementari

### FUNZIONE DI TRASFERIMENTO DI UN CIRCUITO

Vediamo ora come individuare la funzione di trasferimento di un circuito; in generale, si dovrebbe procedere con i seguenti passi:

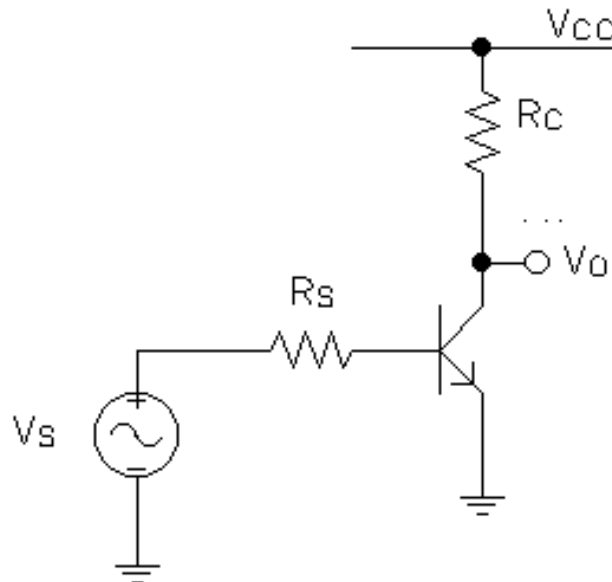
- risolvere il circuito equivalente nel dominio di Laplace
- determinare la funzione di trasferimento in tensione  $A_v(s) = \frac{v_o(s)}{v_i(s)}$
- utilizzare il teorema di risposta armonica per determinare l'andamento del guadagno in tensione a regime al variare della frequenza

Diciamo subito che questo è il procedimento rigoroso che fornisce i risultati esatti, ma è allo stesso tempo quello che richiede una notevole quantità di calcoli e quindi si mostra sempre inadatto per lo studio dei circuiti senza l'ausilio del calcolatore, soprattutto se l'unico scopo dell'analisi è

quello di individuare la frequenza di taglio: infatti, con questo procedimento si trovano tutti gli zeri e i poli del circuito, ma, in genere, per il progetto degli amplificatori si è al più interessati (in caso di analisi della stabilità) ai primi due poli in alta frequenza. Vediamo allora di studiare in questo modo gli stadi elementari a singolo transistor.

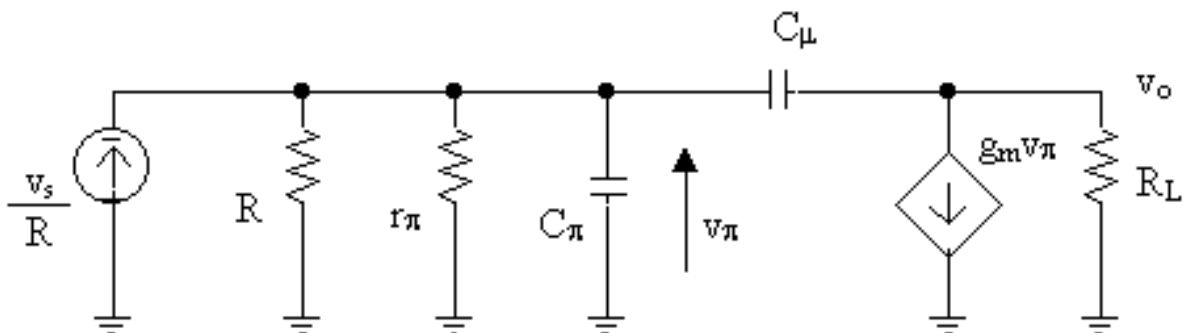
## STADIO AD EMETTITTORE COMUNE

Consideriamo un classico stadio ad emettitore comune come quello della figura seguente:



Il nostro obiettivo è quello di determinare la **frequenza di taglio superiore** di questo circuito, intesa come la frequenza alla quale il guadagno di tensione  $A_v(j\omega) = \frac{v_o}{v_s}(j\omega)$  scende di 3dB rispetto al valore (sempre in dB) che assume per  $\omega=0$ .

Per prima cosa, dobbiamo dunque calcolare  $A_v(j\omega)$ , per cui consideriamo il circuito equivalente per piccoli segnali di questo stadio, nel quale teniamo conto (dato che stiamo supponendo di lavorare ad alta frequenza) delle capacità intrinseche del transistor:



Per comodità, è stato fatto l'equivalente di Norton del generatore forzante d'ingresso e nella resistenza  $R$  è stata inclusa la resistenza intrinseca di base  $r_b$ , che è in serie ad  $R_s$ .

Se scriviamo le relazioni di equilibrio delle correnti ai due nodi del circuito, otteniamo quanto segue (indichiamo le rispettive ammettenze dei resistori con la lettera  $G$ ):

$$(1) \quad v_s \cdot G - v_\pi \cdot (G + g_\pi) - C_\pi \cdot \frac{dv_s}{dt} + C_\mu \cdot \frac{d(v_o - v_\pi)}{dt} = 0$$

$$(2) \quad -g_m \cdot v_\pi + C_\mu \cdot \frac{d(v_\pi - v_o)}{dt} - v_o \cdot G_L = 0$$

Trasformando le due equazioni con la trasformata di Laplace si ottiene :

$$(1) \quad v_s(s) \cdot G - v_\pi(s) \cdot (G + g_\pi) - sC_\pi v_\pi(s) + sC_\mu v_o(s) - sC_\mu v_\pi(s) = 0$$

$$(2) \quad -g_m \cdot v_\pi(s) + sC_\mu v_\pi(s) - sC_\mu \cdot v_o(s) - v_o(s) \cdot G_L = 0$$

Da queste si ottiene :

$$(1) \quad v_s(s) \cdot G = v_\pi(s) \cdot [G + g_\pi + s \cdot (C_\pi + C_\mu)] - sC_\mu v_o(s)$$

$$(2) \quad 0 = v_\pi(s) \cdot [g_m - sC_\mu] + v_o(s) \cdot (G_L + sC_\mu)$$

Esprimiamo  $v_\pi$  in funzione di  $v_o$  mediante la seconda equazione e sostituiamo nella prima; allora si ottiene :

$$v_s(s) \cdot G = \left[ -v_o(s) \cdot \frac{G_L + sC_\mu}{[g_m - sC_\mu]} \right] \cdot [G + g_\pi + s \cdot (C_\pi + C_\mu)] - sC_\mu v_o(s)$$

Evidenziando a secondo membro  $v_o$  si ottiene il rapporto  $\frac{v_o(s)}{v_s(s)}$  :

$$\frac{v_o(s)}{v_s(s)} = \frac{G}{\left[ -\frac{G_L + sC_\mu}{g_m - sC_\mu} \right] \cdot [G + g_\pi + s \cdot (C_\pi + C_\mu)] - sC_\mu}$$

Con qualche semplice manipolazione algebrica, possiamo concludere che

$$\boxed{\frac{v_o(s)}{v_s(s)} = -\frac{G \cdot (g_m - sC_\mu) \cdot R_L}{G + g_\pi + s \cdot [C_\pi + C_\mu + C_\mu R_L \cdot (g_m + g_\pi + G)] + C_\mu C_\pi R_L s^2}}$$

La funzione di trasferimento ha evidentemente due poli, in quanto il denominatore è del 2° ordine; dato che un'equazione di 2° grado con coefficienti positivi ha le soluzioni a parte reale negativa, deduciamo che il sistema presenta due poli a parte reale negativa. Inoltre il sistema presenta uno zero reale positivo  $\frac{g_m}{C_m}$ .

La funzione di trasferimento è strutturalmente esprimibile allora nella forma seguente:

$$A_v(s) = A_{v0} \frac{\left(1 - \frac{s}{z}\right)}{\left(1 - \frac{s}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{s}{p_2}\right)}$$

La costante  $A_{v0}$  definisce il **guadagno statico**, che può essere ottenuto ponendo  $s=0$  nella funzione di trasferimento:

$$A_{v0} = A_v(0) = -g_m R_L \frac{r_\pi}{R + r_\pi} = -\frac{\beta_0 R_L}{R + r_\pi} = -\frac{\beta_0 R_L}{R_s + r_b + r_\pi}$$

Il sistema risulta essere asintoticamente stabile e pertanto si può applicare il **teorema di risposta armonica**, in base al quale la funzione di risposta armonica si ottiene dalla funzione di trasferimento con la semplice sostituzione di  $s$  con  $j\omega$ :

$$A_v(j\omega) = A_{v0} \frac{\left(1 - \frac{j\omega}{z}\right)}{\left(1 - \frac{j\omega}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{j\omega}{p_2}\right)}$$

Il modulo della funzione di risposta armonica ci fornisce il guadagno in tensione del circuito al variare della frequenza. I due poli del circuito si valutano risolvendo l'equazione caratteristica del sistema, ottenibile uguagliando a zero il denominatore di  $A_v(s)$ :

$$C_\mu C_\pi R_L s^2 + s \cdot [C_\pi + C_\mu + C_\mu R_L \cdot (g_m + g_\pi + G)] + G + g_\pi = 0$$

Si tratta di una equazione di 2° grado, le cui soluzioni risultano essere

$$|p_1| \cong \frac{1}{R'} \cdot \frac{1}{C_\pi + C_\mu \cdot \left[ (1 + g_m R_L) + \frac{R_L}{R} \right]} \quad |p_2| \cong \frac{1}{R_L C_\mu} + \frac{1}{R' C_\pi} + \frac{1}{R_L C_\pi} + \frac{g_m}{C_\pi}$$

dove abbiamo posto  $R' = R // r_\pi$ .

La frequenza di taglio può essere determinata imponendo che il modulo della funzione di risposta armonica sia uguale a  $\frac{A_v(0)}{\sqrt{2}}$ . Questa operazione, però, anche in un caso semplice come questo si rivela in realtà inutile, poiché, in genere, per i circuiti si può assumere l'ipotesi di sistema a polo dominante e quindi si ha che  $\omega_h \cong |p_1|$  dove  $p_1$  è il polo a frequenza più piccola.

In questo caso l'ipotesi di sistema a polo dominante è ampiamente verificata: infatti, considerando che ci si trova a frequenze molto più basse di quella di

transizione del transistor, si ha che  $\omega \ll \omega_T \cong \frac{g_m}{C_\pi}$ , da cui deriva che

$$\omega C_\pi \ll g_m$$

Moltiplicando allora ambo i membri di questa disuguaglianza per  $\omega C_\mu R_L$  si ottiene

$$\omega^2 C_\mu C_\pi R_L \ll \omega C_\mu R_L g_m$$

Confrontando con le espressioni della funzione di trasferimento e della risposta armonica, deduciamo che può essere trascurato il termine di 2° grado:

$$\frac{v_0(s)}{v_s(s)} \cong - \frac{G \cdot (g_m - s C_\mu) \cdot R_L}{G + g_\pi + s \cdot [C_\pi + C_\mu + C_\mu R_L \cdot (g_m + g_\pi + G)]}$$

Si osserva inoltre che il valore  $z = \frac{g_m}{C_\mu}$  dello zero di questa funzione è pari a quello, trovato in precedenza, dello zero della funzione  $\beta(s)$ : si tratta, perciò, ancora una volta di uno **zero fuori banda**, per cui possiamo con buona approssimazione trascurarlo (numericamente, il termine  $C_\mu/g_m$  corrispondente a tale zero è dell'ordine di  $10^{-11}$ ), in modo da porre la funzione di trasferimento nella seguente forma approssimata:

$$\frac{v_0(s)}{v_s(s)} \cong - \frac{G g_m R_L}{G + g_\pi + s \cdot [C_\pi + C_\mu + C_\mu R_L \cdot (g_m + g_\pi + G)]}$$

La corrispondente funzione di risposta armonica è quindi

$$\frac{v_0(j\omega)}{v_s} \cong - \frac{G g_m R_L}{G + g_\pi + j\omega \cdot [C_\pi + C_\mu + C_\mu R_L \cdot (g_m + g_\pi + G)]}$$

Questa funzione approssima molto bene quella esatta, ben oltre la frequenza del suo unico polo. Tale polo, in base all'espressione appena ricavata, è dunque

$$p = - \frac{G + g_\pi}{C_\pi + C_\mu [1 + R_L \cdot (g_m + g_\pi + G)]}$$

Il risultato ottenuto è del tutto analogo a quello che si è ottenuto senza l'approssimazione di polo dominante, per cui concludiamo che  $\omega_h = |p|$ .

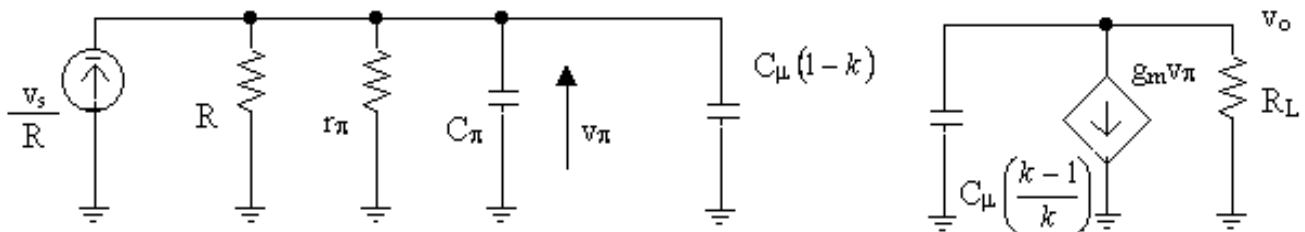
L'approssimazione a polo dominante può essere in genere fatta, senza commettere un grosso errore, quando il 2° polo dista dal 1° di almeno una decade. In caso contrario si possono ottenere errori non tollerabili.



## Effetto Miller sulla capacità $C_m$

Lo stadio ad emettitore comune suggerisce una notevole applicazione del **teorema di Miller**: vediamo di che si tratta.

Se applichiamo alla capacità  $C_\mu$  il teorema di Miller, otteniamo il seguente circuito, equivalente a quello di partenza:



dove abbiamo indicato con  $k$  il guadagno in tensione tra i due nodi a cui è collegata la capacità  $C_\mu$  nel circuito di partenza.

Consideriamo adesso il seguente teorema sulle reti elettriche:

*“Dato un circuito costituito da  $N$  parti tra di loro sconnesse ( $N$  può anche essere uguale ad 1), se per ognuna di esse viene scelta una porta e a quella porta viene valutata l’ammettenza (passivando tutti i generatori indipendenti), allora tutte le frequenze che soddisfano questa condizione sono frequenze naturali del circuito”<sup>1</sup>*

E’ importante evidenziare che è opportuno applicare questo teorema quando la singola parte di circuito per la quale si annulla l’ammettenza ha ordine pari ad uno, altrimenti ci si ritrova a dover fare molti conti e quindi il teorema non risulta di alcuna utilità. Diciamo, quindi, che il teorema risulta utile se si è capaci, con delle operazioni di equivalenza e/o con delle ragionevoli approssimazioni, di sconnettere dal circuito parti di ordine pari ad uno: annullando l’ammettenza in quella parte, si ottiene la frequenza di un polo del circuito.

In pratica, questo è ciò che viene fatto con il teorema di Miller applicato al circuito ad emettitore comune e quindi i due poli si possono valutare facilmente. Il problema è che il coefficiente  $k$  dipende dalla frequenza, poiché rappresenta il guadagno in tensione tra i nodi a cui è collegata  $C_\mu$ . Per calcolare l’espressione esatta di  $k$ , bisognerebbe risolvere il circuito (ma questo è proprio quello che si vuole evitare) e comunque, valutando i poli, si otterrebbero delle espressioni in funzione di  $k$  (e quindi di  $s$ ) e quindi in realtà non si determinerebbero i poli del circuito. Tuttavia, nel caso particolare della determinazione della frequenza di taglio  $\omega_n$ , se supponiamo  $k$  costante e pari al valore a centro banda, otteniamo, applicando il teorema di Miller, un circuito equivalente a quello di partenza fino alla sua frequenza di taglio. Pertanto, *possiamo calcolare la frequenza di taglio del nuovo circuito e assumere con buona approssimazione che essa sia anche la frequenza di taglio del circuito di partenza*. Questa operazione prende il nome di **approssimazione di Miller** (e si tratta di una approssimazione a polo dominante).

Oltre a semplificare notevolmente la ricerca della frequenza di taglio, l’approssimazione di Miller offre una spiegazione significativa di come il limite della risposta in frequenza dei transistor in

<sup>1</sup> La dimostrazione del teorema può essere intuita constatando che in un circuito privo di generatori forzanti l’unica soluzione non banale è data dalla risposta naturale del circuito.

configurazione di emettitore comune non venga dalla  $C_{\pi}$ , ma bensì dalla  $C_{\mu}$  che in genere riporta in ingresso una capacità nettamente maggiore della  $C_{\pi}$  (questo prende il nome di **effetto Miller**).

Adottando dunque l'approssimazione di Miller, si ottengono i seguenti poli:

$$\frac{1}{R} + s \cdot [C_{\pi} + C_{\mu} \cdot (1 - k)] = 0 \quad \Rightarrow \quad p_1 = - \frac{1}{[C_{\pi} + C_{\mu} \cdot (1 - k)] \cdot R}$$

$$\frac{1}{R_L} + s \cdot C_{\mu} \cdot \left( \frac{k - 1}{k} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad p_2 = - \frac{1}{C_{\mu} \cdot \left( \frac{k - 1}{k} \right) \cdot R_L}$$

dove  $k = -g_m R_L$  è il guadagno a centro banda tra i nodi di base e di collettore ai quali è connessa la  $C_{\mu}$ .

*Tra questi due poli, sarà quello a frequenza più bassa ad essere in comune con il circuito di partenza, mentre per quello a frequenza più alta l'equivalenza con l'approssimazione di Miller non è più valida (per cui esso non dà alcuna indicazione). D'altra parte, il nostro scopo è trovare  $\omega_H$ , per cui, a patto che il secondo polo non sia interagente col primo, ci basta trovare quest'ultimo.*

Evidenziamo, a questo punto, che l'effetto Miller non è sempre un effetto indesiderato: infatti, in alcuni casi, collocando una capacità fra due nodi dove esiste un guadagno in tensione elevato e invertente, si può simulare una capacità nettamente maggiore di quella che viene utilizzata (il caso più frequente lo si ha con la compensazione interna degli amplificatori).

### **Osservazioni**

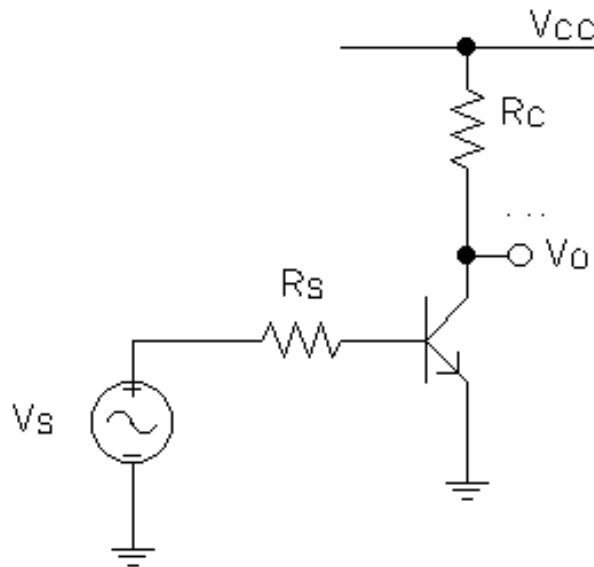
Il circuito che si ottiene con il teorema di Miller è perfettamente equivalente a quello di partenza, ma esso ha l'inconveniente di dipendere da un rapporto di tensioni. Da ciò segue che ha senso applicare il teorema solo nei casi in cui il coefficiente  $k$  è costante e cioè quando si ha un unico ingresso sinusoidale. Se cambia la frequenza del generatore forzante, cambiano i valori delle reattanze.

Inoltre, il circuito di Miller non può essere utilizzato per valutare la resistenza d'uscita, poiché questo essenzialmente comporta uno spostamento del generatore forzante e in genere un cambiamento del coefficiente  $k$ . Quindi, fatto l'equivalente di Miller, il nuovo circuito che si ottiene può essere utilizzato solo per l'analisi di funzioni di trasferimento in avanti (forward).

Infine, *se si utilizza l'approssimazione di Miller, si deve aggiungere, a tutto ciò che è stato detto finora, che il nuovo circuito è equivalente a quello di partenza solo fino alla frequenza di taglio.* Questo giustifica la perdita dello zero di trasmissione che nel circuito di partenza era presente.

### ***Esempio***

Facciamo un esempio numerico al fine di chiarire i concetti esposti nel paragrafo precedente. Consideriamo perciò uno stadio ad emettitore comune come quello considerato nel paragrafo precedente:



Supponiamo di avere a disposizione i seguenti dati:

resistenze del circuito  $\rightarrow R_S=1\text{k}\Omega - R_L=R_C//r_O=5\text{k}\Omega$

parametri intrinseci del transistor  $\rightarrow r_b=200\Omega - \beta=100 - C_\mu=0.5\text{pF}$

punto di lavoro  $\rightarrow I_C=1\text{mA} \rightarrow g_m=40\text{mA/V} \rightarrow r_\pi=2.5\text{k}\Omega$

Supponiamo inoltre di conoscere la frequenza di transizione del dispositivo:  $f_T=400\text{ MHz}$  (in corrispondenza, ovviamente, di  $I_C=1\text{mA}$ , in quanto sappiamo che la corrente di collettore influenza il valore della frequenza di transizione).

Vogliamo calcolare la **frequenza di taglio superiore** del circuito usando sia l'analisi approssimata di Miller sia l'analisi esatta.

Per prima cosa, a prescindere dal tipo di analisi che intendiamo utilizzare per la determinazione di  $\omega_h$ , dobbiamo calcolare la  $C_\pi$ : allora, ci ricordiamo che la frequenza di transizione di un transistor

bipolare è espressa dalla formula  $f_T = \frac{1}{2\pi} \frac{g_m}{C_\pi + C_\mu}$ , dalla quale ricaviamo, sulla base degli altri dati

a disposizione, che  $C_\pi=14.8\text{pF}$ . Come generalmente accade, si nota che questa capacità è molto più grande della  $C_\mu$  (in questo caso di due ordini di grandezza, ma generalmente c'è un solo ordine di grandezza di differenza).

A questo punto, se usiamo l'approssimazione di Miller, possiamo scrivere che la capacità di Miller vale

$$C_M = C_\mu (1 - A_v) = C_\mu (1 + g_m R_L) = 96.7\text{pF}$$

da cui ricaviamo quindi che la frequenza di taglio superiore, coincidente con la frequenza del polo dominante del circuito ottenuto con l'approssimazione di Miller, vale

$$f_H = f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{R} \frac{1}{C_\pi + C_M} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(R_S + r_b) // r_\pi} \frac{1}{C_\pi + C_M} = 1.74\text{MHz}$$

Se adesso ripetiamo lo stesso calcolo usando la formula esatta, troviamo

$$f_H = \frac{\omega_H}{2\pi} = \frac{\omega_H}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{R // r_\pi} \frac{1}{C_\pi + C_\mu \cdot \left[ (1 + g_m R_L) + \frac{R_L}{R} \right]} = 1.69 \text{MHz}$$

E' evidente che i valori trovati con le due formule sono molto prossimi tra di loro.

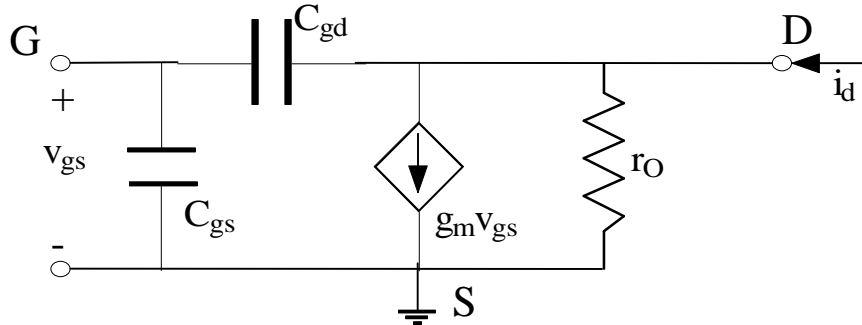
Sfruttando l'analisi esatta, invece, è possibile calcolare anche il polo non dominante del circuito in esame (l'analisi con l'approssimazione di Miller non consente invece il calcolo di tale polo): si ha infatti che

$$p_2 = - \left( \frac{1}{R_L C_\mu} + \frac{1}{(R // r_\pi) C_\pi} + \frac{1}{R_L C_\pi} + \frac{g_m}{C_\pi} \right) = -30 \cdot 10^8 \text{ (rad / sec)} \longrightarrow f_2 = \frac{1}{2\pi} |p_2| = 476 \text{MHz}$$

E' evidente che questo polo si trova a frequenza superiore alla frequenza di transizione del dispositivo (che è anche il limite di validità del modello a  $\pi$ ), che vale 400 MHz, per cui può essere lecitamente trascurato, anche perchè non si può più fare affidamento sul valore trovato.

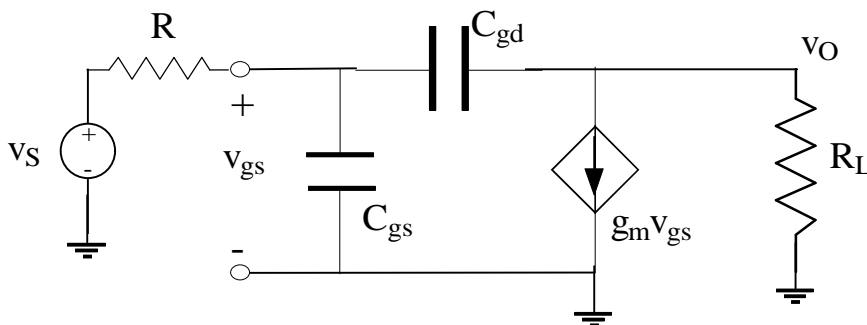
### STADIO A SOURCE COMUNE

Uno stadio a source comune ha un circuito incrementale del tutto analogo a quello dello stadio ad emettitore comune appena studiato: al posto della  $C_\pi$  c'è la capacità  $C_{gs}$  tra gate e source, al posto della  $C_\mu$  c'è la capacità  $C_{gd}$  tra gate e drain e al posto della  $r_\pi$  c'è una resistenza di ingresso infinita:



Di conseguenza, i risultati trovati per lo stadio ad emettitore comune valgono ugualmente per lo stadio a source comune, a patto di effettuare le sostituzioni di cui sopra. A titolo di esempio, determiniamo la frequenza di taglio superiore del circuito sfruttando l'approssimazione di Miller.

Consideriamo lo stadio a source comune alimentato in tensione e chiuso su un carico  $R_L$ :



La capacità  $C_{gd}$  si trova tra due nodi (il gate ed il drain del FET) tra i quali esiste un guadagno di tensione invertente, per cui è soggetta ad *effetto Miller*. Studiamo allora il circuito facendo uso della **approssimazione di Miller**.

Consideriamo l'impedenza di ingresso vista dalla capacità  $C_{gs}$  guardando verso destra: questa impedenza è pari al rapporto tra la tensione  $v_{gs}$  e la corrente che scorre in  $C_{gd}$ ; trascurando in prima approssimazione il solito zero in  $g_m/C_{gd}$ , questa impedenza risulta avere espressione

$$Z_{eq}(s) = \frac{1}{(1 + g_m R_L) C_{gd} s}$$

Si tratta perciò di una capacità, che indichiamo con  $C_M$  e che prende il nome di **capacità di Miller**:

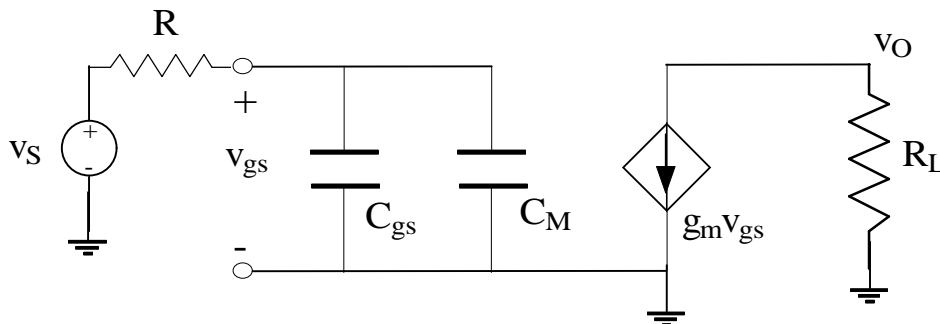
$$C_M = C_{gd} (1 + g_m R_L)$$

Il termine  $g_m R_L$  che compare in questa formula è proprio il guadagno di tensione  $A_V$ , cambiato di segno, tra i nodi di drain e di gate cui la  $C_{gd}$  è connessa:

$$C_M = C_{gd} (1 - A_V)$$

Dato che questo guadagno è generalmente  $\gg 1$  in modulo, la capacità di Miller è molto maggiore di  $C_{gd}$ .

A questo punto, *facendo uso dell'equivalente di Miller, possiamo disegnare un nuovo circuito per il calcolo della funzione di trasferimento di andata e della impedenza di ingresso del circuito di partenza*: si tratta semplicemente di porre la capacità di Miller  $C_M$  tra il gate e massa, ossia in parallelo alla  $C_{gs}$ :



Ricordiamo anche in questo caso che questo circuito equivalente ha in comune, con il circuito precedente, solo il fatto di presentare la stessa funzione di trasferimento d'andata (e quindi lo stesso polo dominante) e la stessa impedenza di ingresso, mentre invece non può essere utilizzata per calcolare né la funzione di trasferimento di ritorno  $\frac{v_i}{v_o}(s)$  né l'impedenza di uscita.

Andiamo allora a calcolare il guadagno di tensione dell'amplificatore: si ottiene l'espressione

$$A_V(s) = -g_m R_L \frac{1}{1 + sR(C_{gs} + C_M)}$$

Come si poteva notare direttamente sul circuito, la capacità di Miller va dunque a sommarsi in parallelo alla  $C_{gs}$ , degradando così le prestazioni in frequenza dell'amplificatore

Sostituendo l'espressione di  $C_M$  ricavata prima, si ottiene

$$A_v(s) = -g_m R_L \frac{1}{1 + sR(C_{gs} + C_{gd}(1 + g_m R_L))}$$

Questa espressione indica che il circuito ha una funzione di trasferimento priva di zeri e con un solo polo, avente espressione

$$p = -\frac{1}{R} \frac{1}{C_{gs} + C_{gd}(1 + g_m R_L)}$$

La frequenza di questo polo corrisponde alla frequenza di taglio superiore del circuito:

$$\omega_H = \omega_p = \frac{1}{R} \frac{1}{C_{gs} + C_{gd}(1 + g_m R_L)}$$

Se, al posto di usare l'approssimazione di Miller, conducessimo una analisi rigorosa del circuito equivalente per piccoli segnali, otterremo la seguente espressione di  $\omega_h$  (nella quale si è comunque trascurato il solito zero fuori banda):

$$\omega_H = \omega_p = \frac{1}{R} \frac{1}{C_{gs} + C_{gd} \left( 1 + g_m R_L + \frac{R_L}{R} \right)}$$

La differenza è dunque nel termine additivo  $R_L/R$  a denominatore, termine che comunque risulta spesso trascurabile rispetto agli altri due.

Si presentano due casi estremi:

- quando  $R \gg 0$ , risulta  $\omega_H \cong \frac{1}{C_{gd} R_L}$

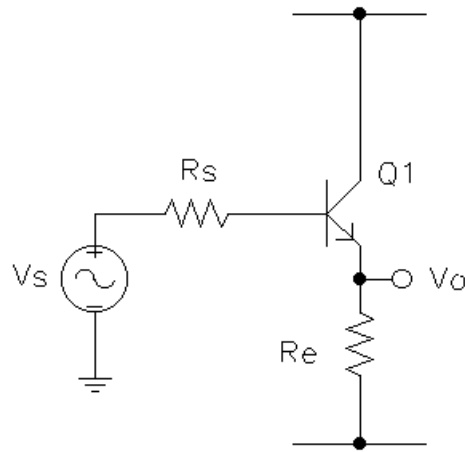
- quando  $R_L \gg 0$ , cioè in presenza di un carico molto piccolo, risulta invece  $\omega_H \cong \frac{1}{R} \frac{1}{C_{gs} + C_{gd}}$

In entrambi i casi, quindi, la frequenza di taglio superiore aumenta.

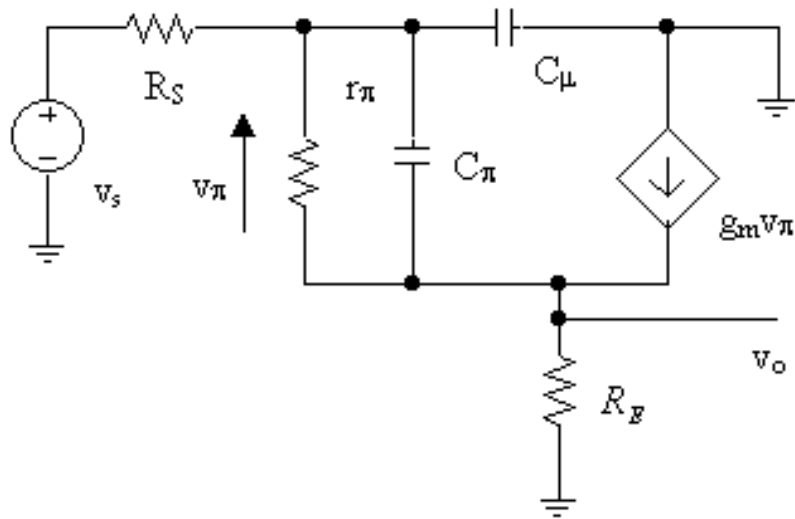
## STADIO INSEGUITORE DI TENSIONE

Lo stadio inseguitore di tensione viene largamente usato. Le sue tipiche applicazioni sono come stadio di disaccoppiamento (per variare l'impedenza da alta e bassa), come traslatore di livello (dato che l'uscita è 0.7V circa al di sotto dell'ingresso) e come stadio di uscita (in classe A). Il suo comportamento in frequenza è di grandissima importanza nell'applicazione da trasformatore di impedenza.

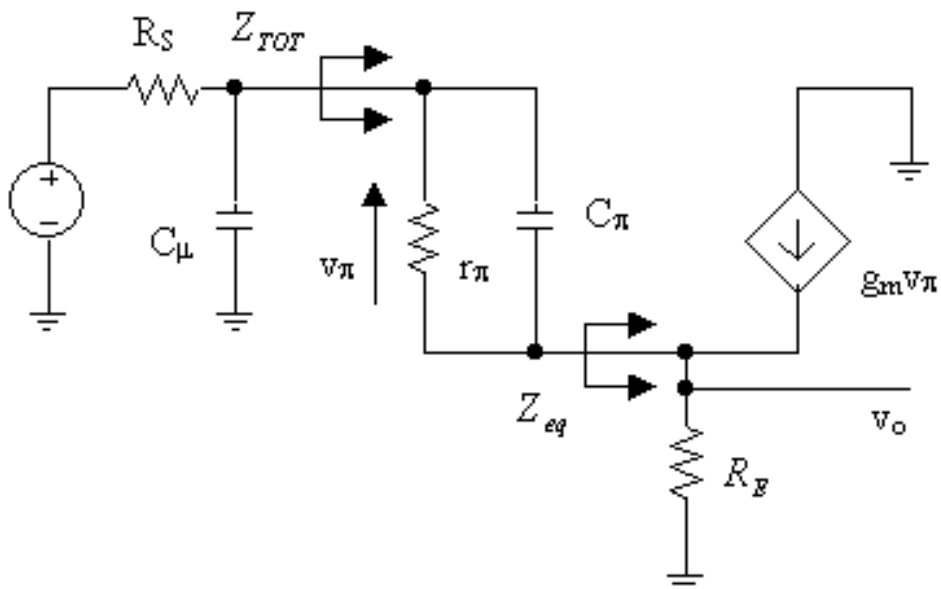
Facciamo allora riferimento all'inseguitore di tensione realizzato mediante un BJT:



Il circuito equivalente per piccoli segnali di questo stadio, tenendo conto delle capacità intrinseche del transistor, è fatto nel modo seguente:



In questo caso, è la  $C_\mu$  che si ritrova in ingresso (tra la base e massa), mentre la  $C_\pi$  si trova a cavallo tra l'ingresso e l'uscita. Allora possiamo ridisegnare il circuito nel seguente modo :



Si nota subito che in questo caso l'effetto Miller è notevolmente attenuato rispetto allo stadio ad emettitore comune, visto che il guadagno in tensione che c'è tra i nodi cui è connessa la  $C_\pi$  è circa unitario. In base a queste considerazioni, si può subito affermare che un transistor, in questa configurazione, ha un comportamento in frequenza nettamente migliore rispetto alla configurazione da invertitore.

E' inoltre facile accorgersi che questo circuito presenta uno zero: infatti, dalla semplice applicazione della LKT all'ultimo circuito disegnato, si ottiene che

$$v_o(s) = R_E [g_m v_\pi + (g_\pi + sC_\pi)v_\pi] = R_E [g_m + g_\pi + sC_\pi]v_\pi$$

In base a questa espressione, la funzione  $v_o(s)$  si annulla in due casi: quando  $v_\pi=0$  e quando  $g_m + g_\pi + sC_\pi = 0$ . La condizione  $v_\pi=0$  si verifica quando la  $C_\pi$  diventa un cortocircuito, il che avviene per  $s \rightarrow \infty$ , ossia per frequenze particolarmente elevate. La condizione  $g_m + g_\pi + sC_\pi = 0$  si verifica invece quando

$$s = -\frac{g_m + g_\pi}{C_\pi} = -\frac{g_m + \frac{1}{r_\pi}}{C_\pi} = -\frac{g_m + \frac{g_m}{\beta}}{C_\pi} \cong -\frac{g_m}{C_\pi}$$

da cui ricaviamo appunto che l'unico zero è  $z = -\frac{g_m}{C_\pi}$ .

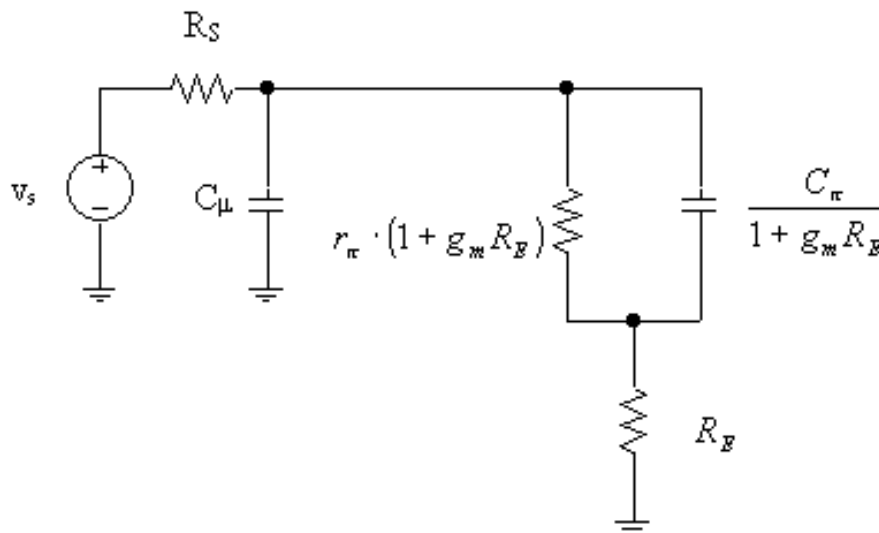
Per quanto riguarda i due poli del circuito, valutiamo l'impedenza indicata prima con  $Z_{TOT}$  : considerando che

$$Z_{eq} = \frac{v_o}{y_\pi v_\pi} = \frac{(g_m + y_\pi) \cdot v_\pi R_E}{y_\pi v_\pi} = \left( \frac{g_m}{y_\pi} + 1 \right) R_E$$

possiamo scrivere che

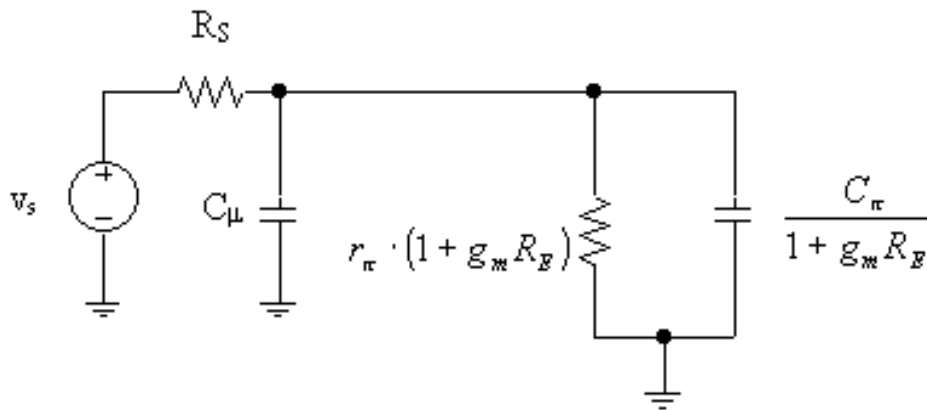
$$Z_{TOT} = \frac{1}{y_\pi} + Z_{eq} = \frac{1}{y_\pi} + \left( \frac{g_m}{y_\pi} + 1 \right) R_E = \frac{1 + g_m R_E}{\frac{1}{r_\pi} + sC_\pi} + R_E = r_\pi \cdot (1 + g_m R_E) // \frac{sC_\pi}{1 + g_m R_E} + R_E$$

Possiamo dunque tracciare il seguente circuito equivalente :





Se trascuriamo la resistenza  $R_E$  nella serie (ipotesi ragionevole alle alte frequenze e corrispondente ad un'approssimazione a polo dominante) otteniamo il seguente circuito :



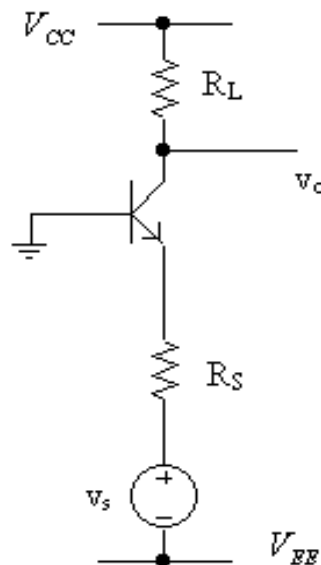
Da questo circuito si ricava, annullando l'ammettenza all'unica porta presente, il polo dominante:

$$\omega_p = - \frac{1}{\left( C_\mu + \frac{C_\pi}{1 + g_m R_E} \right) \cdot [R_S \parallel (1 + g_m R_E) \cdot r_\pi]}$$

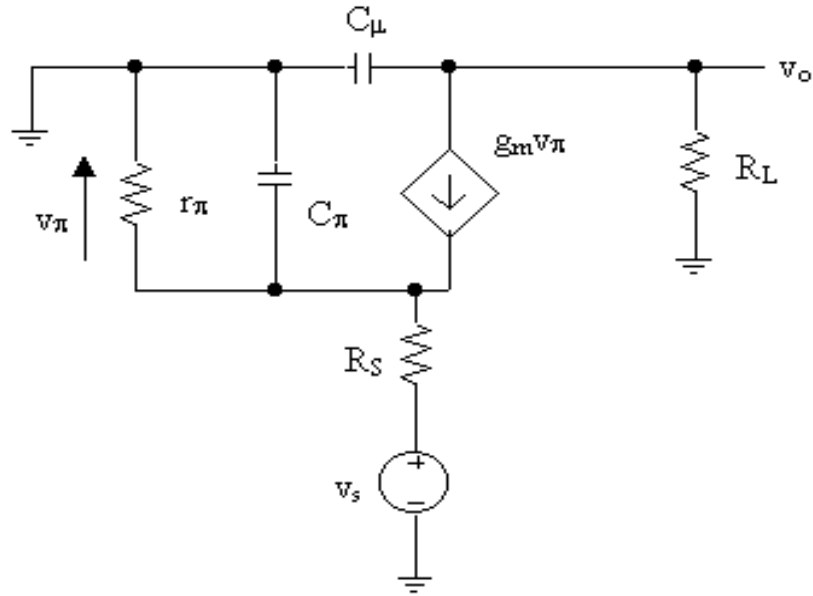
Questa frequenza è piuttosto elevata, soprattutto se la si confronta con quella della configurazione ad emettitore comune; il fattore  $1 + g_m R_E$  diminuisce la  $C_\pi$ , mentre nel parallelo domina la  $R_S$  che in genere è piccola, poiché è la resistenza interna di un generatore (al più la  $r_b$  del transistor). Queste considerazioni sono importanti perché, nello studio del comportamento in alta frequenza di un circuito con più stadi, gli inseguitori di tensione possono essere considerati praticamente privi di dinamica rispetto agli emettitori comuni.

## STADIO INSEGUITORE DI CORRENTE

Lo schema circuitale di uno stadio inseguitore di corrente a BJT è quello riportato nella figura seguente:

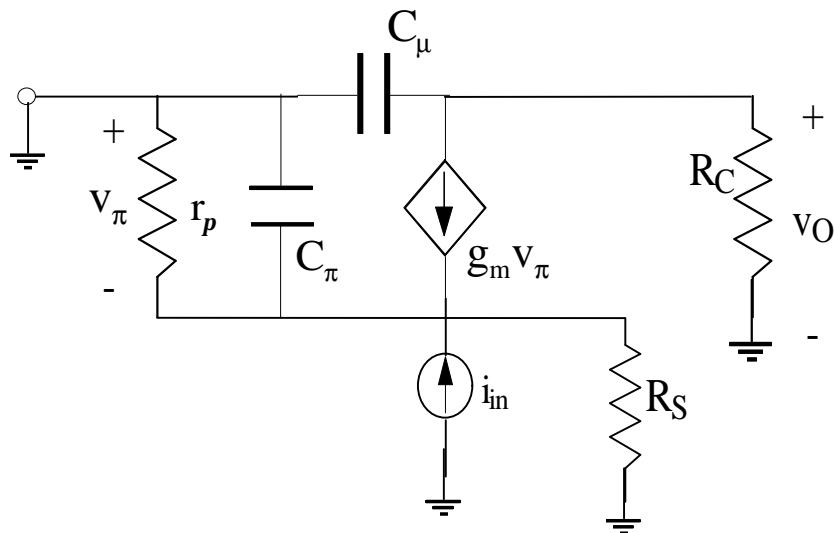


Il circuito per piccoli segnali è il seguente:

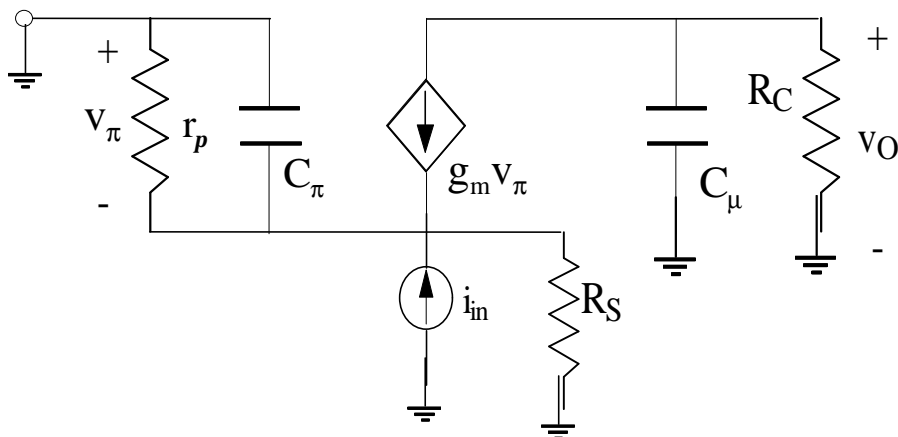


E' molto semplice caratterizzare il comportamento in alta frequenza dell'inseguitore di corrente, a patto però di ridisegnare il circuito equivalente in modo più opportuno.

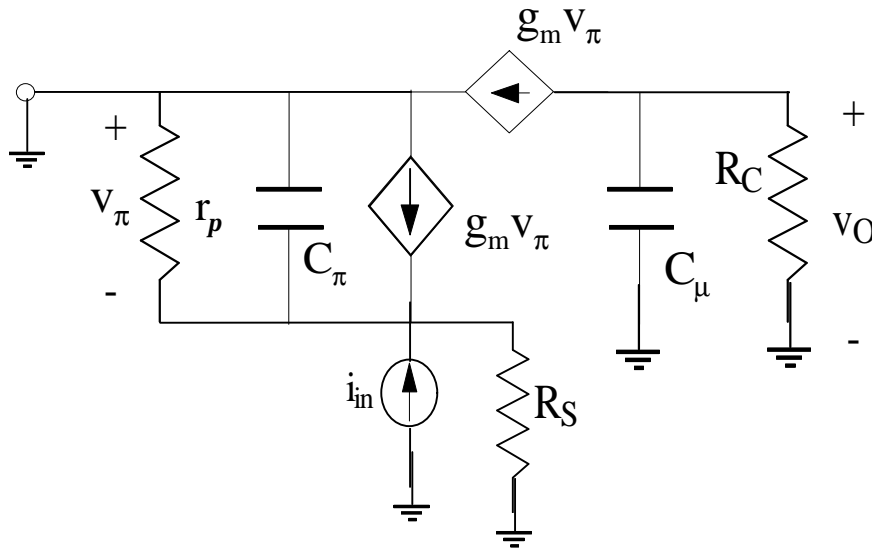
In primo luogo, conviene riportare il generatore forzante mediante il suo equivalente di Norton:



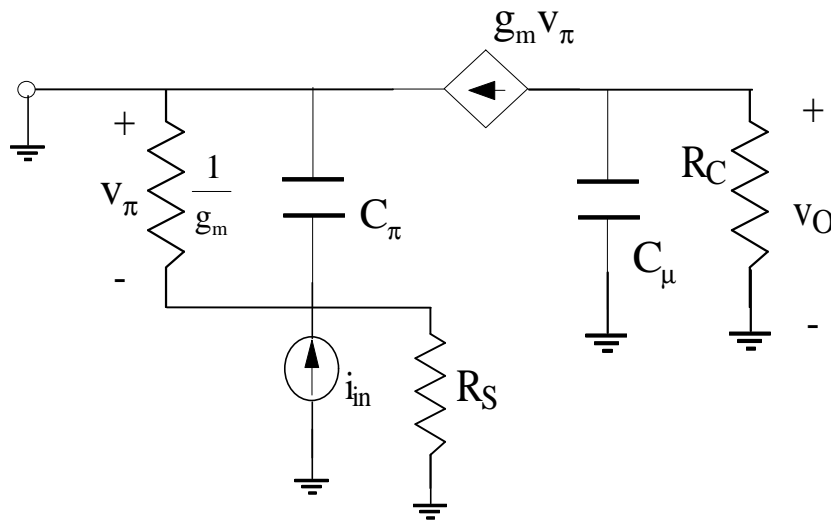
In secondo luogo, il fatto di trascurare la resistenza intrinseca di base fa sì, evidentemente, che  $r_\pi$ ,  $C_\pi$  e  $C_\mu$  abbiano tutte un estremo a massa: questo comporta che la  $C_\mu$  sia in parallelo al carico  $R_C$ :



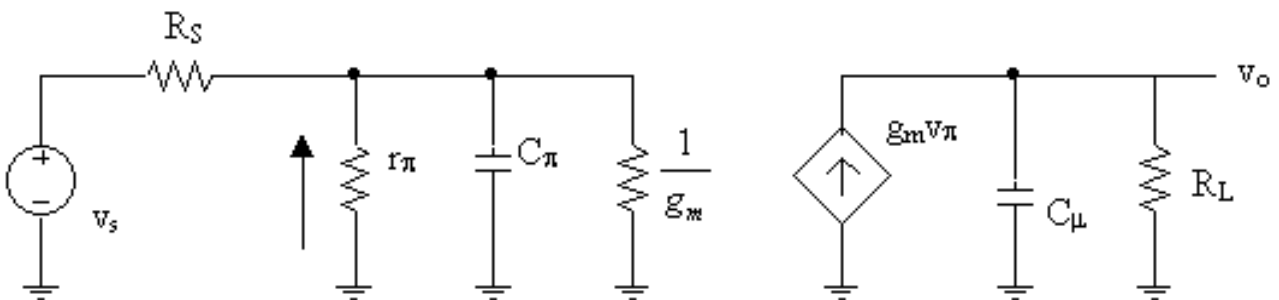
A questo punto, c'è il "problema" del generatore pilotato che trasferisce direttamente dall'ingresso e dall'uscita. Conviene allora *splittarlo* come nella figura seguente:



In questo modo, il generatore pilotato di sinistra è sottoposto alla stessa tensione che lo pilota, per cui possiamo sostituirlo con  $1/g_m$ : questa resistenza va in parallelo alla  $r_\pi$ , ma è  $\beta$  volte più piccola di essa, per cui prevale nel parallelo:



Infine, ponendo in basso i terminali degli elementi connessi a massa, possiamo concludere che il circuito cui fare riferimento è il seguente:



Su questo circuito è immediato determinare i due poli del circuito:

$$\frac{1}{R_S // r_{\pi} // \frac{1}{g_m}} + sC_{\pi} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_1 = -\frac{1}{C_p \cdot \left( R_S // r_p // \frac{1}{g_m} \right)}$$

$$\frac{1}{R_L} + sC_m = 0 \quad \Rightarrow \quad p_2 = -\frac{1}{C_m R_L}$$

Possiamo subito evidenziare che in questa configurazione il transistor non presenta effetto Miller e quindi anche in questo caso si ottengono elevate prestazioni in frequenza.

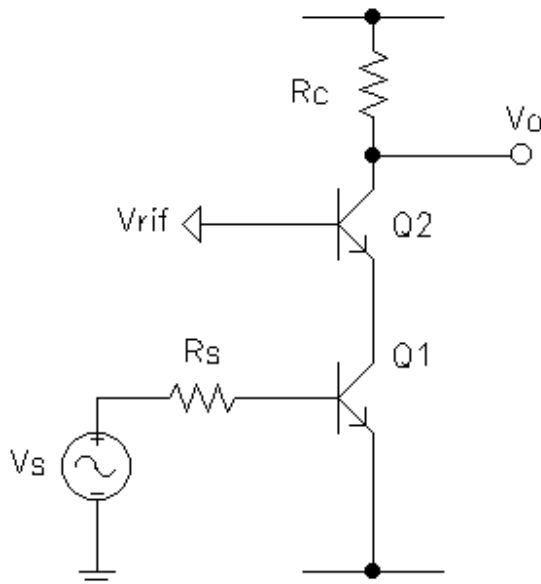
In genere,  $R_L$  è più grande della resistenza che si vede in ingresso e quindi è  $p_2$  il polo a più bassa frequenza. Tale frequenza è comunque maggiore di quella del polo che si introduce nell'emettitore comune.

Quindi, in base anche alle considerazioni del paragrafo precedente, concludiamo che i transistor che lavorano in configurazione da inseguitore (di tensione o di corrente) riescono a raggiungere le prestazioni massime del dispositivo stesso e si rivelano stadi molto veloci.

### STADIO CASCODE

Vediamo ora, brevemente, di giustificare il motivo per il quale lo stadio cascode ha delle eccellenti prestazioni in frequenza.

Lo schema circuitale di uno stadio cascode a BJT è il seguente:



Alla luce di ciò che è stato detto finora, è facile caratterizzare il funzionamento di questo circuito: infatti, la caratteristica peculiare di questa configurazione è che il transistor Q1 vede sul suo collettore una resistenza pari a  $\frac{1}{g_{m2}}$  e quindi il guadagno in tensione tra i nodi della  $C_{\mu1}$  risulta

unitario (ovviamente invertente) data l'uguaglianza delle transconduttanze:

$$A_{V1} = -g_{m1} R_{carico} = -g_{m1} \frac{1}{g_{m2}} \cong -1 \text{ (le } g_m \text{ sono uguali in quanto i due transistor hanno, circa, la stessa)}$$

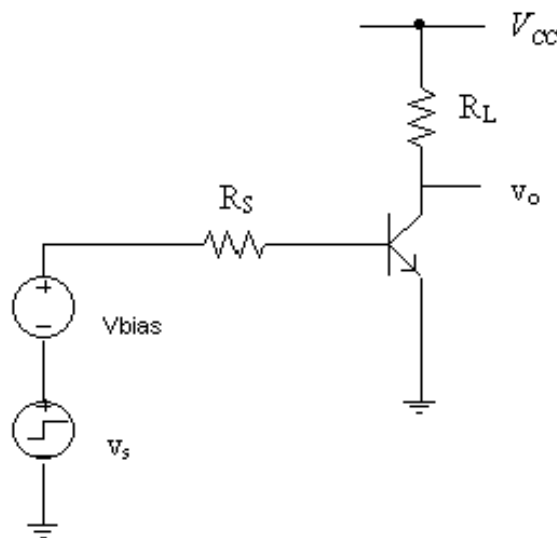
corrente di collettore). Al contrario, dunque, dello stadio ad emettitore comune, la  $C_{\mu 1}$  è soggetta ad un effetto Miller estremamente ridotto, il che quindi consente di migliorare decisamente le prestazioni in frequenza.

In definitiva, collegando un base comune in uscita ad un emettitore comune si riesce a contenere notevolmente l'effetto Miller del 1° transistor e allo stesso tempo a mantenere un elevato guadagno, poiché il 1° transistor fornisce l'amplificazione di corrente (circa  $\beta$ ) e poi l'inseguitore di corrente trasporta questa corrente su un carico elevato. Lo stadio cascode può essere dunque considerato come uno stadio emettitore comune privo dell'effetto Miller.

## DETERMINAZIONE SPERIMENTALE DELLE FREQUENZE DI TAGLIO

Fino a questo punto, si è analizzato il procedimento generale che si deve seguire per caratterizzare il comportamento in alta frequenza di un circuito e contemporaneamente si sono analizzate le configurazioni circuitali fondamentali. Ora vediamo come sia possibile determinare sperimentalmente le frequenze di taglio di un circuito. Si tratta di legare i parametri della risposta armonica con i parametri della risposta nel dominio del tempo.

Si consideri il seguente circuito :



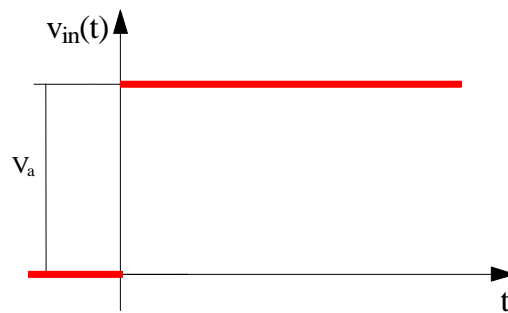
Il generatore  $V_{bias}$  garantisce la polarizzazione, mentre l'altro fornisce un piccolo segnale in ingresso allo stadio.

Supponiamo che il circuito abbia un solo polo ad alta frequenza: ciò comporta che la funzione di trasferimento del circuito per piccoli segnali ad esso associato possa essere espressa come

$$\frac{v_o}{v_i}(s) = \frac{k}{1 - \frac{s}{s_p}}$$

La costante  $k$  rappresenta il valore statico (o a bassa frequenza) del guadagno (che nel nostro caso è negativo, ma può essere anche positivo se l'amplificatore considerato è non invertente, come ad esempio l'inseguitore di tensione).

Supponiamo di applicare all'ingresso del circuito un gradino di tensione di ampiezza  $v_a$  sufficientemente piccola da potersi considerare un piccolo segnale:



Vogliamo la tensione di uscita.

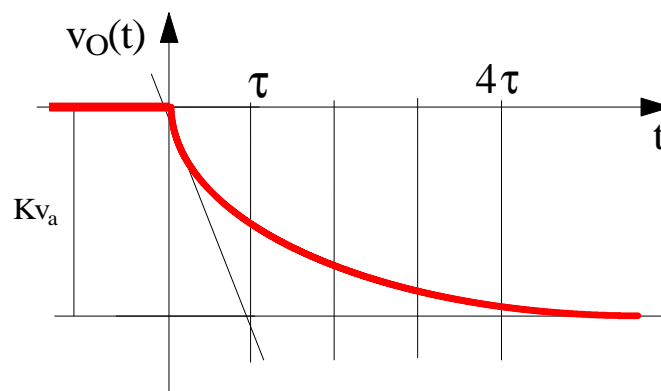
Tenendo conto che la trasformata del gradino è  $v_a/s$ , deduciamo che la tensione di uscita ha la seguente espressione nel dominio di Laplace:

$$v_o(s) = \frac{k}{1 - \frac{s}{s_p}} \cdot \frac{V_a}{s} = -\frac{kv_a}{s - s_p} + \frac{kv_a}{s}$$

Antitrasformando secondo Laplace si ottiene :

$$v_o(t) = kV_a (1 - e^{s_p t}) = kv_a \left( 1 - e^{-\frac{t}{4\tau}} \right)$$

In base a questa espressione, la tensione di uscita tende al valore di regime  $kv_a$  dopo un transitorio con andamento esponenziale caratterizzato dalla **costante di tempo**  $\tau = -1/s_p$  pari all'inverso del polo. Tenendo conto che il guadagno  $k$  dello stadio è invertente, l'uscita ha il seguente andamento:



Su questo andamento tipico si definiscono alcuni importanti parametri caratteristici:

- **tempo di ritardo  $T_0$  (delay time)**: tempo necessario affinché l'uscita raggiunga il 50% del valore finale;
- **tempo di salita  $T_r$  (t-rise)**: tempo necessario affinché l'uscita passi dal 10% al 90% del valore finale;

• **tempo di assestamento  $T_a$** : tempo necessario affinché l'uscita rimanga entro il  $\pm 5\%$  del valore finale.

Di particolare importanza è il tempo di salita, che può essere misurato molto facilmente: infatti, indicando con  $t_1$  l'istante in cui l'uscita raggiunge il 10% del valore finale (cioè di  $Kv_a$  nel caso del gradino di ampiezza  $v_a$ ) e con  $t_2$  l'istante in cui l'uscita raggiunge il 90% del valore finale, risulta

$$\begin{aligned} 0.1Kv_a &= Kv_a (1 - e^{p_1 t_1}) \\ 0.9Kv_a &= Kv_a (1 - e^{p_1 t_2}) \end{aligned}$$

Esplicitando  $t_1$  e  $t_2$  e facendone la differenza, si ottiene il tempo di salita:

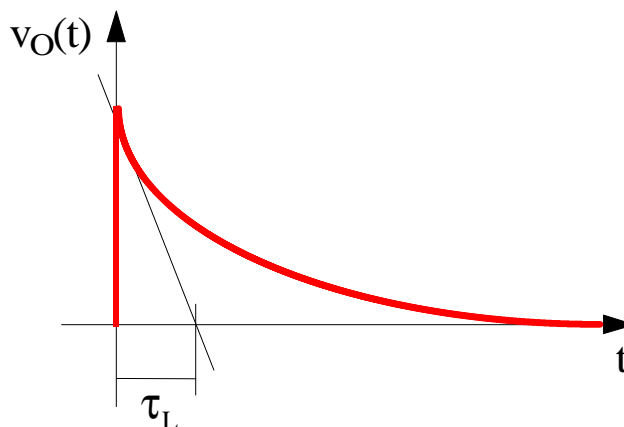
$$\begin{cases} p_1 t_1 = \ln 0.9 \\ p_1 t_2 = \ln 0.1 \end{cases} \longrightarrow t_r = t_2 - t_1 = -\frac{1}{p_1} \ln 9$$

Considerando dunque che  $\ln 9 = 2.2$  e che  $-p_1 = \omega_p = \omega_h$ , possiamo concludere che

$$t_r = \frac{2.2}{\omega_h} = \frac{0.35}{f_h}$$

Per un sistema a polo dominante, il tempo di salita è dunque inversamente proporzionale alla frequenza di taglio superiore: *per sistemi di questo tipo è quindi possibile, mediante una semplice misura in laboratorio della risposta del circuito, determinare la frequenza di taglio superiore del circuito.* Viceversa, è possibile stimare la risposta ad un gradino del circuito conoscendo la  $f_h$  grazie alla quale si può risalire al  $t_r$ .

Un discorso analogo può essere fatto per le basse frequenze, poiché un sistema con un polo e uno zero alle basse frequenze risponde ad un gradino di piccolo segnale in ingresso con un uscita che decresce esponenzialmente come riportato nella figura seguente:



In questo caso si può parlare di **tempo di discesa  $t_f$** , il quale può essere determinato molto facilmente in quanto è più facile, rispetto al caso precedente, stimare la costante di tempo  $\tau_L$  ( $=1/\omega_L$ )

di decadimento (essendo la scala dei tempi molto più alta): una volta stimata  $\tau_L$ , si può direttamente scrivere che

$$t_f \cong 4\tau_L$$

Quindi, se alle basse frequenze c'è un polo che domina, la frequenza di taglio inferiore  $f_1$  può essere determinata sperimentalmente analizzando la risposta al gradino del circuito (in particolare si misura il tempo di decadimento del valore dell'uscita quando l'ingresso è costante).

### Sistemi con due poli nella funzione di trasferimento

Abbiamo dunque evidenziato, nel paragrafo precedente, il legame esistente tra la risposta in frequenza e l'andamento nel tempo di piccoli segnali applicati ad un circuito con una funzione di trasferimento a singolo polo: in questa categoria rientrano, ad esempio, lo stadio ad emettitore comune e, quasi sempre, gli amplificatori operazionali.

Considerazioni analoghe possono essere fatte su circuiti rappresentati da una funzione di trasferimento a più poli, anche se l'andamento temporale dell'uscita può in questi casi essere molto diverso da quello visto nelle figure precedenti.

Di particolare importanza sono i sistemi aventi **funzione di trasferimento del secondo ordine**, dei quali diamo adesso dei rapidi cenni, citando i principali risultati senza dimostrarli.

Un sistema (lineare stazionario) del secondo ordine ha una funzione di trasferimento del tipo seguente:

$$a(s) = \frac{k\omega_m^2}{s^2 + 2\delta\omega_m s + \omega_m^2}$$

Ponendo in ingresso al sistema un gradino di ampiezza unitaria, si ottiene la seguente risposta temporale (può essere una tensione o una corrente):

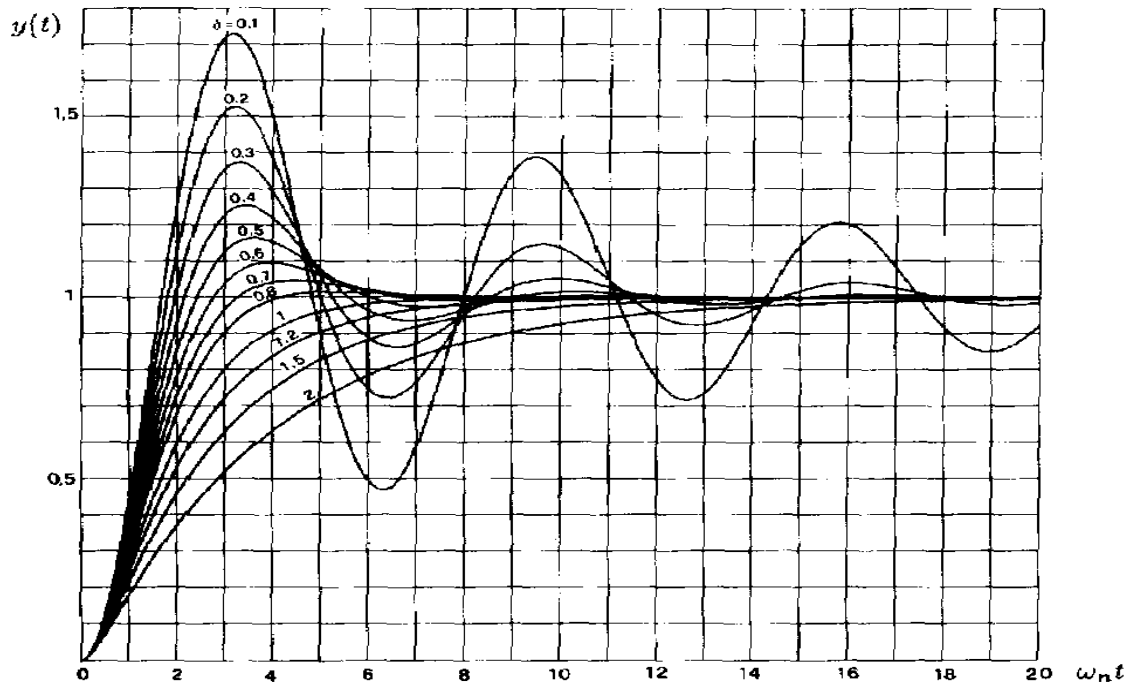
$$y(t) = H(t) - \frac{e^{-\delta\omega_m t}}{\sin\varphi} \sin(\omega_d t + \varphi)$$

dove  $\omega_d = \omega_m \sqrt{1 - \delta^2}$  e dove l'angolo  $\varphi$  è tale da soddisfare la duplice condizione  $\begin{cases} \sqrt{1 - \delta^2} = \sin\varphi \\ \delta = \cos\varphi \end{cases}$ .

Si individua anche questa volta una **costante di tempo**, che è  $\tau = 1/\delta\omega_m$ . Questa costante di tempo caratterizza il termine esponenziale  $e^{-\delta\omega_m t}$ , il quale smorza o amplifica il termine sinusoidale  $\sin(\omega_d t + \varphi)$  a seconda che il coefficiente di smorzamento  $\delta$  sia  $>0$  o  $<0$ : quando  $\delta > 0$ , il termine sinusoidale si smorza e  $y(t)$  tende asintoticamente ad  $H(t)$ , mentre, quando  $\delta < 0$ , l'oscillazione sinusoidale assume ampiezza sempre crescente e quindi  $y(t)$  diverge da  $H(t)$ .

La figura seguente mostra l'andamento di  $y(t)$  per vari valori del coefficiente di smorzamento  $\delta$  e con scala dei tempi normalizzata in rapporto all'inverso della pulsazione naturale  $\omega_m$ :





Un caso assolutamente particolare è quello in cui  $\delta=1$ : in questo caso, infatti, risulta

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + 2\omega_m}{(s + \omega_m)^2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \omega_m} - \frac{\omega_m}{(s + \omega_m)^2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \omega_m} - \omega_m \frac{1}{(s - (-\omega_m))^2}$$

e quindi, antitrasformando, si ottiene

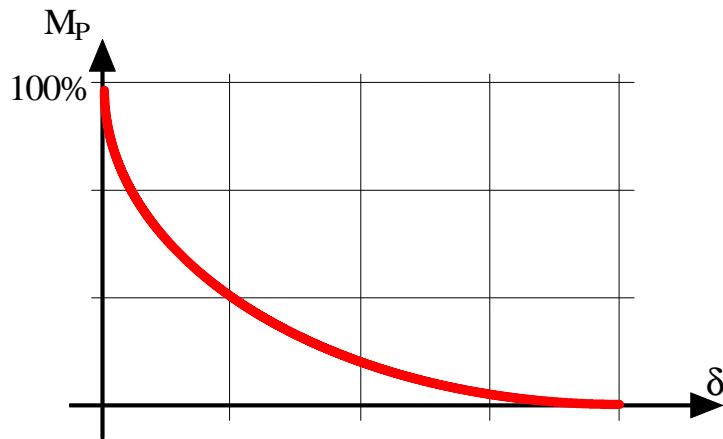
$$y(t) = H(t) - H(t)e^{-\omega_m t} - \omega_m H(t)te^{-\omega_m t} = H(t) - H(t)(1 - \omega_m t)e^{-\omega_m t}$$

Non si ha dunque alcuna **sovraelongazione (overshoot)**, intesa come differenza positiva tra il valore raggiunto dall'uscita ed il valore finale di regime, visto che non c'è più il termine sinusoidale:  $y(t)$  tende asintoticamente al valore finale  $H(t)$  senza mai superarlo.

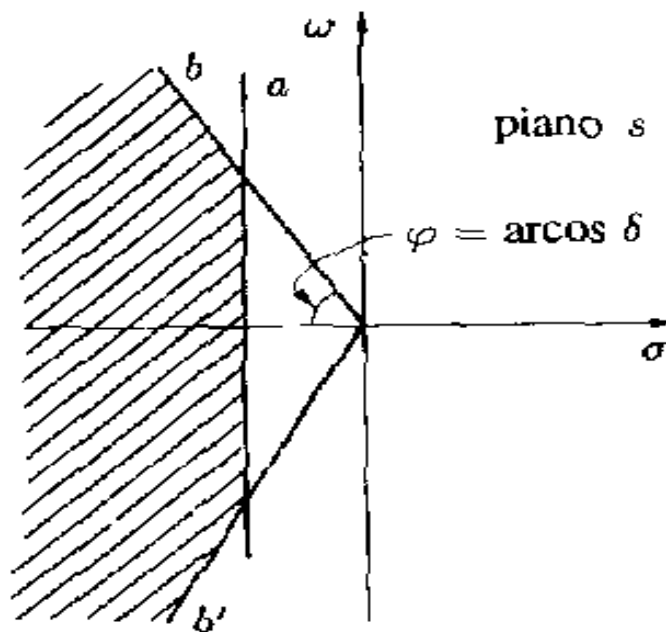
Può interessare la relazione esatta tra il coefficiente di smorzamento  $\delta$  ed il valore della **massima sovraelongazione percentuale**, ossia la differenza tra il massimo raggiunto dall'uscita ed il valore finale, espressa in %. Si trova che

$$M_p(\%) = e^{-\frac{\delta \pi}{\sqrt{1-\delta^2}}} \cdot 100$$

il che significa che la massima sovraelongazione percentuale è funzione univocamente del valore del coefficiente di smorzamento (mentre non dipende da  $\omega_m$ ) ed è uguale al 100% quando  $\delta=0$ :



Talvolta, viene imposta una specifica sul valore della massima sovraelongazione, nel senso che, ad esempio, si chiede che  $M_p$  non superi un certo massimo assegnato. In questo caso, è necessario che i 2 poli della funzione di trasferimento del sistema si trovino nel settore delimitato dalle rette  $b$  e  $b'$  della figura seguente:



Le suddette rette  $b$  e  $b'$  rappresentano luoghi di poli corrispondenti ad un dato valore del coefficiente di smorzamento, come avremo modo di approfondire in seguito.

### FREQUENZA DI TAGLIO SUPERIORE E COEFFICIENTI DELLA FUNZIONE DI RISPOSTA ARMONICA

In genere, alle alte frequenze la funzione di trasferimento presenta solo poli e nessun zero, per cui ha una espressione del tipo

$$A(s) = \frac{k}{a_0 + a_1 \cdot s + \dots + a_n \cdot s^n}$$

Vogliamo far vedere come sia possibile ricavare una stima della frequenza di taglio superiore direttamente dalla conoscenza dei coefficienti dell'equazione caratteristica di  $A(s)$ .

E' possibile mettere in evidenza a denominatore il coefficiente  $a_0$ , in modo da scrivere che

$$A(s) = \frac{K}{1 + b_1 \cdot s + \dots + b_n \cdot s^n} \quad \text{con } K = \frac{k}{a_0} \text{ e } b_i = \frac{a_i}{a_0}$$

Possiamo anche scrivere :

$$A(s) = \frac{A(0)}{\left(1 - \frac{s}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{s}{p_2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{s}{p_n}\right)} = \frac{A(0)}{1 - s \cdot \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n}\right) + s^2 \cdot \left(\frac{1}{p_1 \cdot p_2} + \dots\right) + \dots}$$

In base alle ultime espressioni, deduciamo che

$$b_1 = -\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n}\right) = -\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}$$

Se adesso consideriamo la funzione di risposta armonica, abbiamo che

$$A(j\omega) = \frac{A(0)}{1 - j\omega \cdot \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n}\right) - \omega^2 \cdot \left(\frac{1}{p_1 \cdot p_2} + \dots\right) + \dots}$$

Alla frequenza di taglio si ha

$$|A(j\omega_h)| = \frac{A(0)}{\sqrt{2}} \Rightarrow |A(j\omega_h)|^2 = \frac{[A(0)]^2}{2}$$

Se il polo a più bassa frequenza (ricordiamo che stiamo considerando il modello alle alte frequenze) è abbastanza lontano dagli altri, allora la funzione di risposta armonica (almeno fino alla frequenza di taglio superiore) può essere espressa come

$$A(j\omega) \cong \frac{A(0)}{1 - j\omega \cdot \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n}\right)}$$

Questo perchè, essendo  $\frac{\omega_h}{p_i} < 1$ , risulta anche  $\frac{\omega_h^2}{p_i \cdot p_j} \ll 1$  e questo a maggior ragione questo vale per i termini di potenza maggiore di 2.

Allora, tornando alla relazione, di prima, possiamo scrivere che

$$\frac{[A(0)]^2}{1 + \omega_h^2 \cdot \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n}\right)^2} = \frac{[A(0)]^2}{2}$$

Da qui deduciamo dunque che

$$\omega_h^2 \cdot \left( \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n} \right)^2 = 1 \longrightarrow \frac{1}{\omega_h^2} = \left( \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n} \right)^2$$

Abbiamo dunque una equazione di secondo grado in  $1/\omega_h$ , le cui soluzioni sono

$$\frac{1}{\omega_h} = \pm \left( \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n} \right)$$

La soluzione positiva non è accettabile (poiché si avrebbe un valore negativo) e quindi

$$\frac{1}{\omega_h} = - \left( \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n} \right) = b_1 = \frac{a_1}{a_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_h \cong \frac{a_0}{a_1}}$$

Questo metodo non va più bene se il polo dominante è multiplo, oppure ci sono più poli vicini al polo dominante.

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**  
e-mail: [sandry@iol.it](mailto:sandry@iol.it)  
sito personale: <http://users.iol.it/sandry>  
succursale: <http://digilander.iol.it/sandry1>