Appunti di Elettronica Applicata
Capitolo 13 - Parte II
Il metodo delle costanti di tempo

INTRODUZIONE

Data una **rete RC attiva** (contenente cioè solo resistori, condensatori e generatori pilotati), ***il metodo delle costanti di tempo*** *consente di effettuare una stima della posizione del polo, tra quelli in bassa frequenza, che si trova alla frequenza maggiore e del polo, tra quelli in alta frequenza, che si trova alla frequenza minore.* La stima viene fatta valutando l'influenza che ogni singola capacità esercita sul circuito trascurando (nel modo che si vedrà) la presenza delle altre capacità; in questo modo, i calcoli vengono enormemente semplificati, poiché ci si riconduce sempre allo studio di circuiti del 1° ordine e quindi a dover valutare soltanto delle resistenze equivalenti.

Questo metodo non comporta soltanto una riduzione dei calcoli, ma consente anche di stabilire quale capacità o quale resistenza equivalente influenza maggiormente la frequenza del polo che si sta valutando e quindi fornisce utili suggerimenti in sede di progetto. Il lato negativo è dato dal fatto che questo rimane un metodo approssimato che non sempre può dare risultati validi.

La dimostrazione del metodo viene riportata in appendice a questi appunti; qui ci limitiamo a enunciare i risultati più significativi.

DESCRIZIONE DEL METODO

Prima diamo delle definizioni :

- data una rete RC attiva di ordine maggiore di uno e contenente una capacità C, si definisce **costante di tempo a circuito aperto** associata alla capacità C (e la indichiamo con $\boxed{\tau_C^o}$) la costante di tempo del circuito che si ottiene ponendo a circuito aperto tutte le altre capacità presenti nel circuito di partenza (essa è uguale al prodotto di C per la resistenza equivalente che si vede ai capi di C).

- partendo sempre dalle ipotesi del caso precedente, si definisce **costante di tempo in cortocircuito** associata alla capacità C (e la indichiamo con $\boxed{\tau_C^S}$) la costante di tempo del circuito che si ottiene ponendo in cortocircuito tutte le altre capacità del circuito di partenza (essa è uguale al prodotto di C per la resistenza equivalente che si vede ai capi di C).

Sulla base di queste definizioni, si dimostrano le seguenti due relazioni fondamentali:

$$\boxed{-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{p_i}\right)=\sum_{i=1}^{n}\tau_{C_i}^{o}} \qquad \boxed{-\sum_{i=1}^{n}p_i=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\tau_{C_i}^{S}}\right)}$$

La 1° relazione si rivela utile quando, ad alta frequenza, il polo a frequenza più bassa ha una frequenza molto più piccola delle frequenze degli altri poli; in questo caso, la quantità $\sum_{i=1}^{n}\tau_{C_i}^{o}$ (cioè la somma delle costanti di tempo a circuito aperto) fornisce una buona stima dell'inverso della frequenza del polo a più bassa frequenza (in questo caso si parla di **metodo delle costanti di tempo in circuito aperto**).

L'altra relazione è utile quando, in bassa frequenza, il polo a più alta frequenza ha una frequenza molto maggiore delle frequenze degli altri poli; allora la quantità $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\tau_{C_i}^{S}}\right)$ (ossia la somma dei reciproci delle costanti di tempo in cortocircuito) fornisce una buona stima della frequenza del polo a frequenza maggiore (in questo caso si parla di **metodo delle costanti di tempo in cortocircuito**).

Questo metodo si rivela molto utile per la determinazione delle frequenze di taglio di un generico amplificatore; infatti, *per determinare la frequenza di taglio superiore è sufficiente considerare il modello in alta frequenza dell'amplificatore e usare il metodo delle costanti di tempo a circuito aperto;* in questo modo si ottiene la frequenza più bassa del modello in alta frequenza e quindi la frequenza di taglio superiore del circuito di partenza:

$$\boxed{\omega_h=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}\tau_{C_i}^{o}}}$$

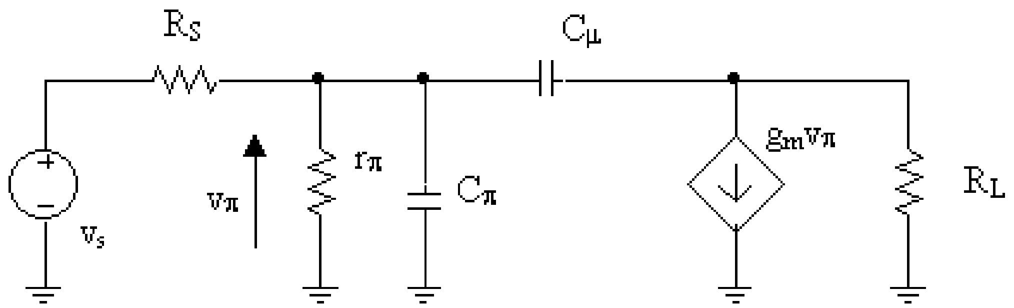
Invece, *per la frequenza di taglio inferiore basta considerare il modello alle basse frequenze dell'amplificatore e applicare il metodo delle costanti di tempo in cortocircuito;* così si ottiene la frequenza più alta del modello alle basse frequenze che coincide con la frequenza di taglio inferiore:

$$\boxed{\omega_l=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\tau_{C_i}^{S}}\right)}$$

Questo sempre nell'ipotesi che le frequenze che si stanno calcolando siano dominanti rispetto alle altre, altrimenti l'approssimazione può non risultare buona (è importante osservare che il metodo delle costanti di tempo dà comunque un indicazione che si può rivelare oltremodo utile in sede di progetto).

ESEMPIO: STADIO INVERTITORE A BJT

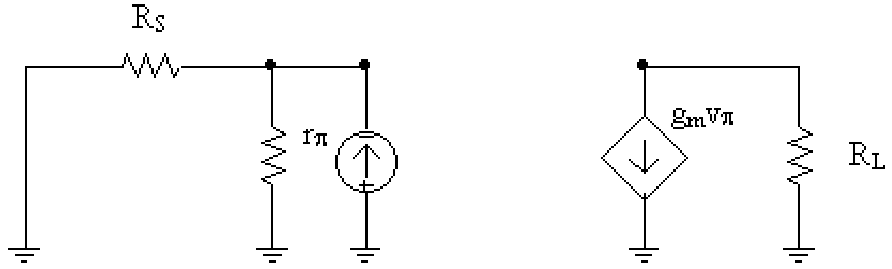
Passiamo subito a considerare un esempio, valutando la frequenza di taglio superiore dello stadio ad emettitore comune. Il circuito equivalente è dato da :



Applichiamo il metodo delle costanti di tempo a circuito aperto. Per farlo dobbiamo valutare le costanti di tempo associate alle due capacità:

$$\tau^o_{C_\pi} = C_\pi \cdot R_{C_\pi} \qquad \tau^o_{C} = C_\mu \cdot R_{C_\mu}$$

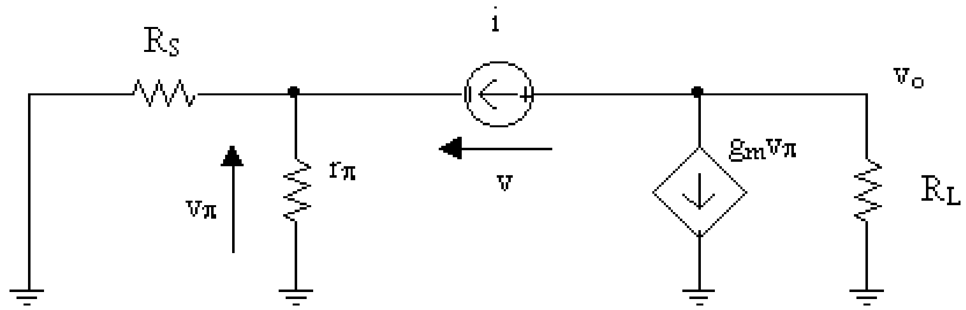
Per ottenere la 1° costante di tempo, dobbiamo sostituire C_π con un generatore di test, cortocircuitare il generatore d'ingresso e sostituire la C_μ con un circuito aperto. Così facendo, si ottiene il seguente circuito :



La resistenza ai capi del generatore di test si vede facilmente che vale $R_{C_\pi} = r_\pi // R_S$, per cui possiamo scrivere che

$$\tau^o_{C_\pi} = C_\pi \cdot (r_\pi // R_S)$$

Per la costante associata a C_μ, si deve sempre passivare il circuito; si deve inoltre aprire la C_π e porre un generatore di test al posto di C_μ; allora si ottiene il seguente circuito:



In questo caso si ha:

$$v + v_o = v_\pi \qquad \text{ed inoltre} \qquad v_\pi = (R_S // r_\pi)\cdot i \quad e \quad v_o = -(i + g_m v_\pi)\cdot R_L$$

Combinando queste relazioni si ottiene :

$$v = v_\pi - v_o = (R_S // r_\pi)\cdot i + [i + g_m (R_S // r_\pi)\cdot i]\cdot R_L$$

da cui quindi concludiamo che

$$R_{C_\mu} = \frac{v}{i} = R_S // r_\pi + R_L \cdot [1 + g_m (R_S // r_\pi)]$$

La costante di tempo associata alla C_μ vale dunque

$$\tau^o_{C_\mu} = \{R_S // r_\pi + R_L \cdot [1 + g_m (R_S // r_\pi)]\}\cdot C_\mu$$

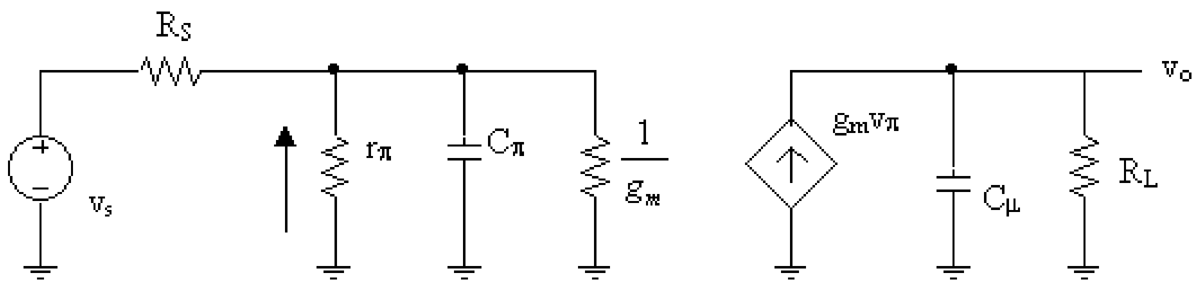
Allora, per il metodo delle costanti di tempo a circuito aperto si ottiene

$$\omega_h = \frac{1}{\tau^o_{C_\pi} + \tau^o_{C_\mu}} = \frac{1}{C_\pi \cdot (r_\pi // R_S) + \{R_S // r_\pi + R_L \cdot [1 + g_m (R_S // r_\pi)]\}\cdot C_\mu}$$

Si può verificare che questa espressione è analoga a quella trovata con le leggi di Kirchoff.

ESEMPIO: STADIO INSEGUITORE DI CORRENTE

Consideriamo ora l'inseguitore di corrente :



<u>In questo caso, applicare il metodo delle costanti di tempo è inutile</u>, poiché si ha un circuito costituito da due parti tra di loro sconnesse; le capacità non si influenzano tra di loro e quindi, se si calcolano le costanti di tempo a circuito aperto, esse coincideranno con le costanti di tempo associate ad ognuna delle due parti del circuito. Inoltre in questo caso esse coincidono anche con le costanti di tempo in cortocircuito: infatti, se le due capacità non si influenzano, nel calcolo della resistenza vista dai morsetti di una qualsiasi delle due è indifferente che l'altra sia in cortocircuito o in circuito aperto.

Si vede facilmente che:

$$\tau^{o}_{C_\pi} = C_\pi \cdot \left(r_\pi // R_S // \frac{1}{g_m} \right) \cong C_\pi \cdot \left(\frac{1}{g_m} \right) \qquad\qquad \tau^{o}_{C_\mu} = R_L \cdot C_\mu$$

Quale delle due sia più grande dipende molto dal valore delle resistenze, ma in genere la resistenza di carico è molto maggiore di $\frac{1}{g_m}$, più di quanto C_p è maggiore di C_m. Se valutiamo la frequenza di taglio superiore sommando le due costanti di tempo otteniamo una frequenza che è più piccola della frequenza del polo a più bassa frequenza.

In questo caso, quindi, il metodo delle costanti di tempo non serve, poiché si riescono a calcolare esattamente le frequenze dei poli del circuito.

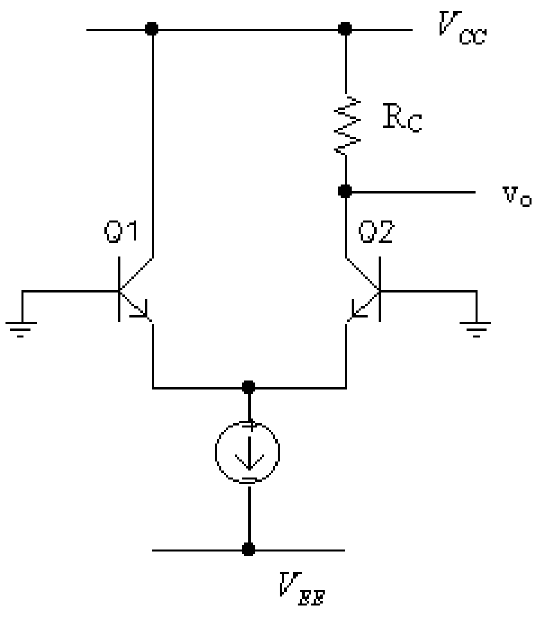
In generale, dato un qualsiasi circuito, è sempre opportuno provare preventivamente a semplificare il circuito, cercando, con delle operazioni di equivalenza e/o con delle approssimazioni, di sconnettere il maggior numero di capacità (nel base comune le capacità sono sconnesse anche se non lo è il circuito, mentre nell'emettitore comune si ricorre ad una particolare approssimazione); successivamente, si può applicare il metodo delle costanti di tempo separatamente ad ogni parte del circuito.

Sottolineiamo che *il metodo delle costanti di tempo è un metodo che fa uso di approssimazioni e quindi è inutile utilizzarlo se si possono valutare facilmente le soluzioni esatte.*

ESEMPIO: STADIO CC-CB

Consideriamo ora circuiti più complessi per i quali il metodo delle costanti di tempo diventa necessario (infatti se un circuito è notevolmente complesso esso non può che essere risolto con delle approssimazioni).

Consideriamo ad esempio il circuito seguente:



Il circuito presenta 4 diverse capacità intrinseche (due per ogni transistor). Tuttavia, per il segnale, la capacità $C_{\mu 1}$ è in cortocircuito, mentre le due C_π sono in parallelo. Quindi l'ordine del circuito è pari a 2.

Applichiamo il metodo delle costanti di tempo in circuito aperto, il che significa che, nel valutare una resistenza equivalente, dobbiamo considerare come dei circuiti aperti le altre capacità.

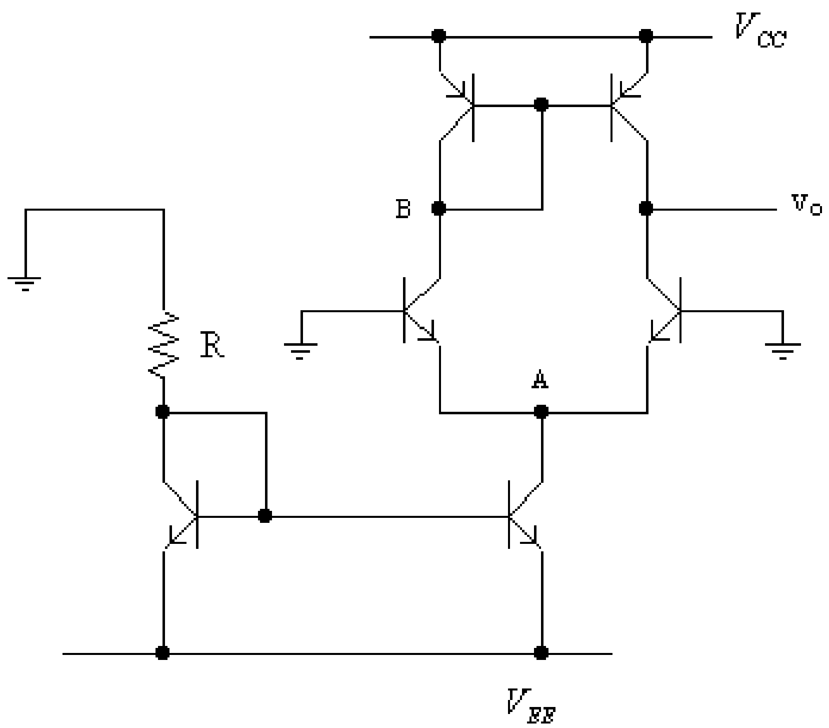
Senza nemmeno ricorrere al circuito equivalente per piccoli segnali, possiamo subito dire che la capacità $2C_{\pi}$ vede ai suoi capi una resistenza pari al parallelo di due resistenze pari a $\frac{1}{g_m}$ (ciò che si vede da entrambi gli emettitori dei due transistor). L'altra capacità è data da C_{μ_2}, che vede ai suoi capi una resistenza pari a circa $R_C // 2r_o$. E' evidente che C_{μ_2} viene notevolmente esaltata dalla resistenza che vede, quindi si può scrivere :

$$\omega_h \cong \frac{1}{C_{\mu_2} \cdot (R_C // 2r_{o\cong})} \cong \frac{1}{C_{\mu_2} \cdot (R_C)}$$

E' evidente che il metodo consente di stimare il valore di w_h con maggiore facilità e, nello stesso tempo, di capire quali sono gli elementi circuitali dai quali dipende maggiormente.

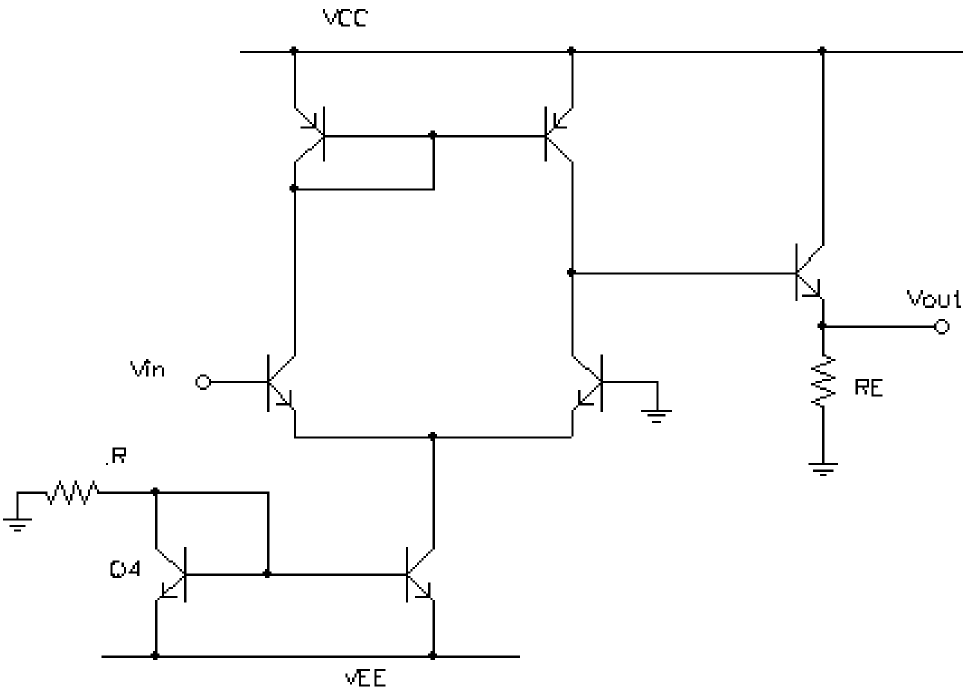
ESEMPIO: AMPLIFICATORE IN TRANSCONDUTTANZA

Passiamo a considerare l'OTA con specchio di corrente per la polarizzazione:



Questo circuito presenta be 12 condensatori e quindi non può assolutamente essere studiato con le leggi di Kirchoff. Il metodo delle costanti di tempo consente di stimare abbastanza facilmente la frequenza di taglio superiore. Infatti il circuito ha solo il nodo d'uscita ad alta impedenza, mentre il nodo a cui è connessa R e i nodi A e B sono ad impedenza molto bassa (almeno 3 ordini di grandezza di differenza), poiché da almeno una parte vedono una resistenza pari a $\frac{1}{g_m}$; allora sarà la costante di tempo associata all'uscita che fisserà la frequenza di taglio superiore. La resistenza del nodo d'uscita vale $r_{op} // r_{on}$; la capacità equivalente che si vede dal nodo d'uscita è data dal parallelo tra la C_μ del transistor npn e la serie di C_μ e $2C_\pi$ dei transistor pnp; questa è circa pari a C_μ e quindi alla fine si ottiene $\omega_h \cong \frac{1}{C_\mu \cdot (r_{on} // r_{op})}$.

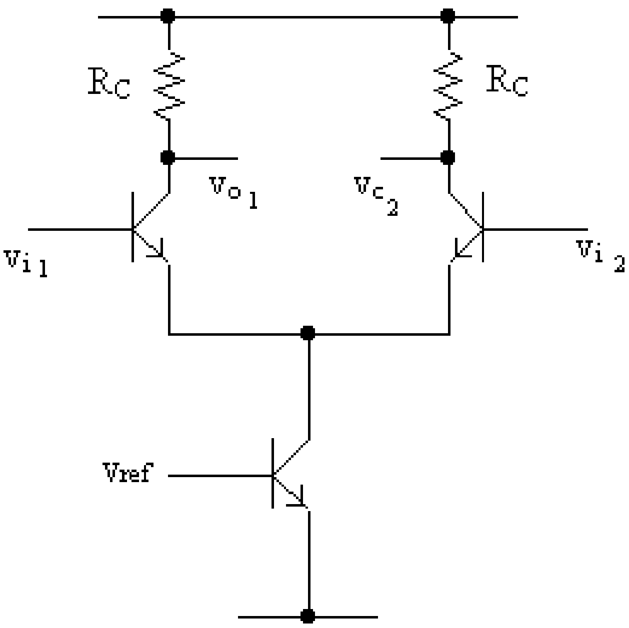
Supponiamo adesso di aggiungere all'uscita dell'amplificatore un inseguitore di tensione:



Alla C_μ dell'OTA si deve porre in parallelo la C_μ del transistor dell'inseguitore, mentre, essendo la resistenza d'ingresso dell'inseguitore molto elevata, la resistenza del nodo d'uscita dell'OTA non viene modificata.

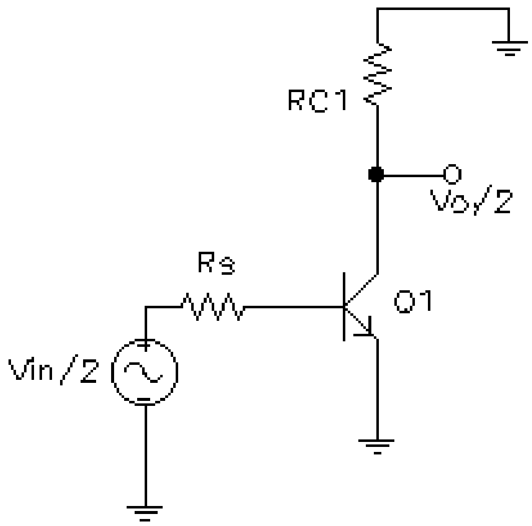
ESEMPIO: STADIO DIFFERENZIALE

Consideriamo ora il classico stadio differenziale:



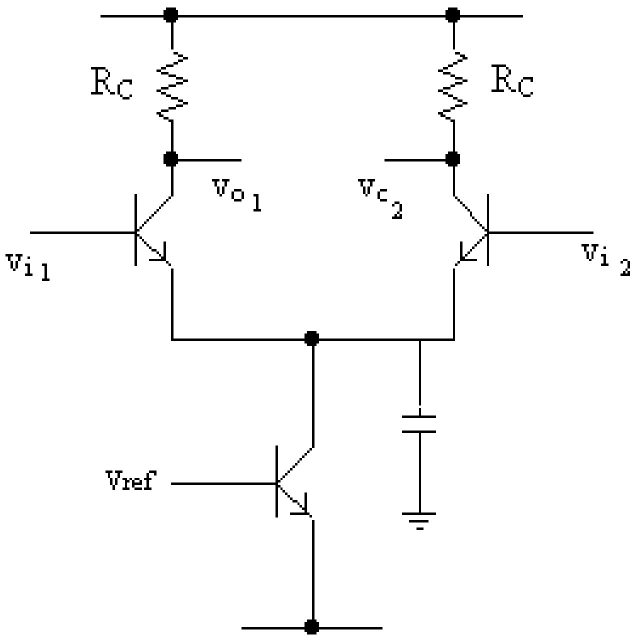
Questo stadio costituisce un blocco fondamentale in molto circuiti. *Vogliamo studiarne il comportamento in alta frequenza sia rispetto ad un ingresso di modo puramente differenziale sia rispetto ad un ingresso di modo comune.*

Cominciamo dal caso in cui è applicato in ingresso un segnale di modo puramente differenziale: sappiamo bene che, in questo caso, il nodo in cui convergono i due emettitore è a massa sotto segnale, per cui non è importante considerare nè la resistenza di Norton del generatore di corrente né una eventuale capacità in parallelo ad essa. Consideriamo ad esempio il semicircuito di sinistra:

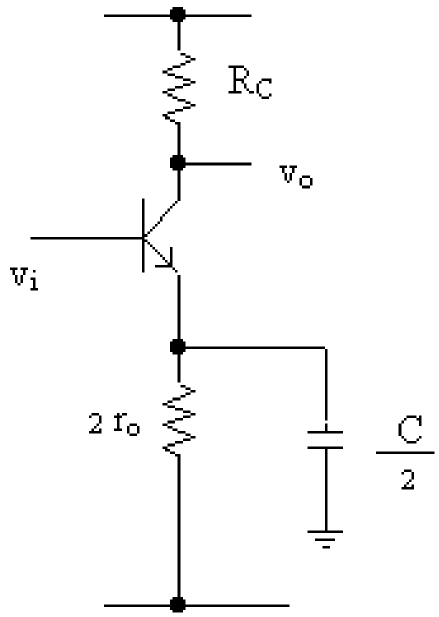


Il guadagno $\frac{v_O/2}{v_{in}/2}$ di questo circuito è pari al guadagno di modo differenziale A_{dm} del circuito completo iniziale. Osservando il circuito, si nota che si tratta di classico stadio ad emettitore comune come quello analizzato all'inizio di questo capitolo, il che ci consente quindi di affermare che valgono le stesse identiche considerazioni fatte in quel caso.

Passiamo allora a considerare il caso in cui è applicato in ingresso allo stadio differenziale un segnale di modo comune, cioè un segnale uguale sui due terminali di ingresso: in questo caso, sappiamo che sul nodo in cui convergono gli emettitore compare un segnale pari a metà del modo comune, per cui ci si riconduce ad un emettitore comune con forte degenerazione (pari al doppio della resistenza di uscita dello specchio usato per la polarizzazione). A causa della forte degenerazione, il circuito di modo comune risente molto meno dell'effetto Miller e quindi ha una banda molto più ampia del circuito di modo differenziale. Questo può indurre a pensare che il CMRR rimanga costante fino alla frequenza di taglio superiore del circuito di modo differenziale. In realtà, le cose non stanno così, poiché il circuito di modo comune risente dell'effetto della capacità collettore-substrato del transistor che funge da specchio:



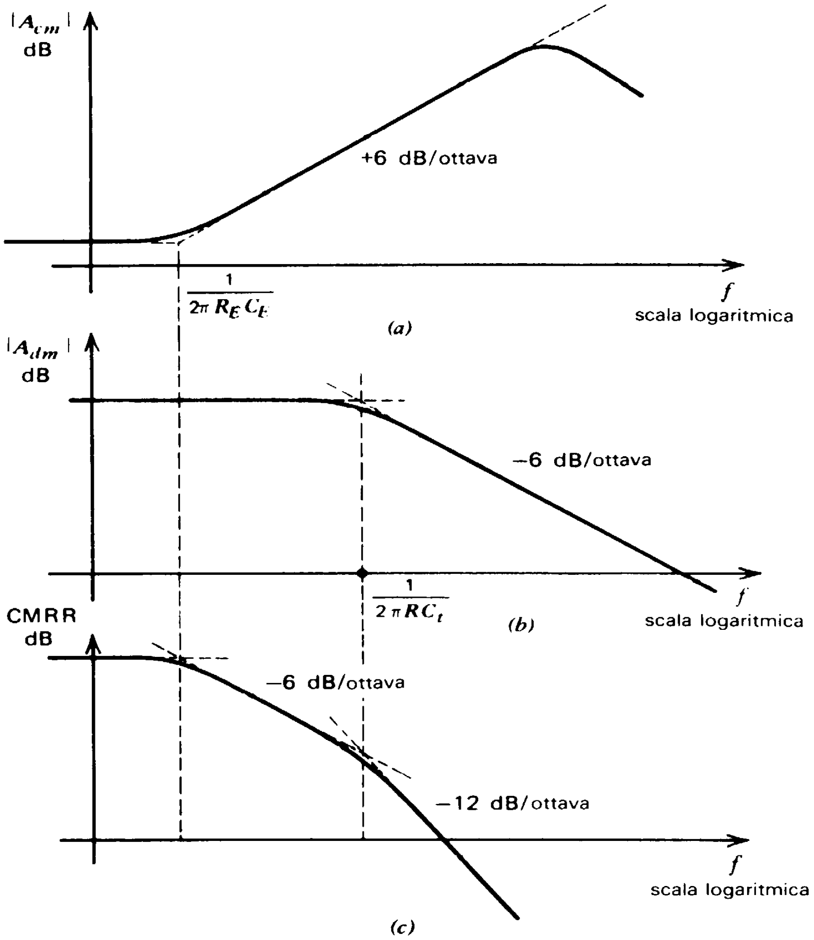
La capacità del transistor che funge da generatore viene messa in cortocircuito nel modo differenziale (in quanto il nodo in cui convergono gli emettitori di Q1 e Q2 è una massa di segnale per il modo differenziale), ma è ben presente nel modo comune, come evidenziato dal seguente mezzo-circuito di modo comune:



Essa introduce allora uno zero ad una frequenza che si può ricavare facilmente:

$$\frac{1}{2r_o} + s \cdot \frac{C}{2} = 0 \longrightarrow s_Z = -\frac{1}{C \cdot r_o}$$

Questa frequenza $\omega_Z = \dfrac{1}{Cr_O}$ risulta molto più bassa della frequenza di taglio del circuito di modo differenziale, comportando un aumento del guadagno di modo comune e quindi una diminuzione del CMRR. E' ovvio che questo aumento di A_{cm} (e quindi la diminuzione del CMRR) è indesiderato, in quanto si vorrebbe che il guadagno di modo comune fosse il più piccolo possibile. D’altra parte, questo aumento non può continuare indefinitamente, in quanto le capacità che prima abbiamo trascurato (C_π e C_μ) incominceranno, da una certa frequenza in poi, a far sentire il loro peso, costringendo $A_{cm}(s)$ a diminuire alle frequenze più elevate. Tuttavia, a queste stesse frequenze il guadagno di modo differenziale decresce ancora più rapidamente, con la conseguenza di una ulteriore riduzione del CMRR. Il tutto è rappresentato in questi diagrammi :



Il CMRR rimane alto in un range di frequenze estremamente ridotto e pertanto la reiezione di modo comune risulta valida con il ripple della tensione di alimentazione o con le variazioni dovute al variare della temperatura.

Comportamento in bassa frequenza

INTRODUZIONE

In molti amplificatori, è possibile che siano presenti effetti capacitivi che fanno sentire la propria influenza alle basse frequenze (questo in genere non accade per i circuiti integrati, per in quali serve solo l'analisi in alta frequenza). Si può subito evidenziare che, se eventualmente un amplificatore presenta un polo a bassa frequenza, dovrà allora avere anche uno zero a bassa frequenza, poiché solo in questo modo sarà possibile avere una funzione di risposta armonica che risulta essere costante in un ben preciso intervallo di frequenza. Allora *i modelli circuitali che caratterizzano il comportamento in bassa frequenza degli amplificatori presenteranno sempre funzioni di risposta armonica aventi ugual numero di poli e zeri:*

$$A(s) = K \cdot \frac{(s - z_1) \cdot (s - z_2) \ldots\ldots (s - z_n)}{(s - p_1) \cdot (s - p_2) \ldots\ldots (s - p_n)}$$

La determinazione degli zeri di un circuito in genere non viene fatta, poiché di solito si è interessati alle frequenze di taglio e alla posizione dei poli dominanti in alta frequenza (per la caratterizzazione della stabilità); quindi non verranno forniti metodi generali per la ricerca degli zeri di un circuito (ovviamente gli zeri possono essere determinati valutando la funzione di risposta armonica mediante le leggi di Kirchoff, ma abbiamo ampiamente osservato come tale procedimento sia tutt'altro che comodo). Tuttavia, possiamo subito dire che l'eventuale presenza di zeri alle basse frequenze può essere dovuta o a **capacità di disaccoppiamento** o a **capacità di by-pass** (cioè sono questi i casi pratici in cui si va incontro): le prime servono a disaccoppiare in continua e quindi introducono sempre uno zero alla frequenza nulla, mentre le seconde servono a bypassare delle resistenze (che devono servire solo a garantire la polarizzazione desiderata) e introducono uno zero alla frequenza per la quale l'ammettenza del parallelo tra la capacità di by-pass e la resistenza da bypassare risulta nulla. Quindi *la determinazione della posizione degli zeri per i modelli circuitali in bassa frequenza di un amplificatore viene fatta agevolmente.*

Per quanto riguarda la determinazione dei poli, non c'è da aggiungere molto, poiché si utilizzano gli stessi strumenti che sono stati definiti per lo studio in alta frequenza. In questo caso si rivela particolarmente utile il **metodo delle costanti di tempo in cortocircuito**, poiché esso consente di determinare con molta facilità la frequenza di taglio inferiore di un amplificatore.

STIMA DELLA FREQUENZA DI TAGLIO INFERIORE

Vediamo prima di tutto come è possibile determinare la frequenza di taglio inferiore quando si ha a disposizione la funzione di trasferimento del modello del circuito alle basse frequenze. Per semplificare i conti, facciamo riferimento ad un sistema a due poli e due zeri, considerando, però, che il risultato vale anche in generale e lo si può dimostrare allo stesso modo mediante un procedimento soltanto più laborioso.

Allora consideriamo una funzione di trasferimento nella forma seguente:

$$A(s)=k\cdot\frac{(s-z_1)\cdot(s-z_2)}{(s-p_1)\cdot(s-p_2)}$$

La corrispondente funzione di risposta armonica è

$$A(j\omega)=k\cdot\frac{(j\omega-z_1)\cdot(j\omega-z_2)}{(j\omega-p_1)\cdot(j\omega-p_2)}=k\cdot\frac{-\omega^2+z_1\cdot z_2-j\omega\cdot(z_1+z_2)}{-\omega^2+p_1\cdot p_2-j\omega\cdot(p_1+p_2)}=k\cdot\frac{-\omega+\frac{z_1\cdot z_2}{\omega}-j\cdot(z_1+z_2)}{-\omega+\frac{p_1\cdot p_2}{\omega}-j\cdot(p_1+p_2)}$$

Alla frequenza di taglio inferiore si ha $|A(j\omega_l)|=\frac{k}{\sqrt{2}}$. Se il polo dominante si trova ad una frequenza significativamente maggiore di quelle degli altri poli e degli zeri si può considerare $\omega_l>>\frac{z_1\cdot z_2}{\omega_l}$ e $\omega_l>>\frac{p_1\cdot p_2}{\omega_l}$ e pertanto si può scrivere

$$|A(j\omega_l)|=k^2\cdot\frac{\omega_l^2+(z_1+z_2)^2}{\omega_l^2+(p_1+p_2)^2}=\frac{k^2}{2}$$

Da qui si ricava che

$$2\cdot\omega_l^2+2\cdot(z_1+z_2)^2=\omega_l^2+(p_1+p_2)^2\longrightarrow\omega_l^2=(p_1+p_2)^2-2\cdot(z_1+z_2)^2$$

In questo caso, a differenza che per le alte frequenze, anche gli zeri contribuiscono ad individuare la frequenza di taglio inferiore. In genere gli zeri sono a frequenze molto più basse e quindi è possibile scrivere:

$$\omega_l^2\cong(p_1+p_2)^2\quad\Rightarrow\quad\omega_l=-(p_1+p_2)$$

Se moltiplichiamo i fattori a denominatore della funzione di trasferimento si ottiene :

$$A(s)=k\cdot\frac{(s-z_1)\cdot(s-z_2)}{s^2-s\cdot(p_1+p_2)+p_1\cdot p_2}$$

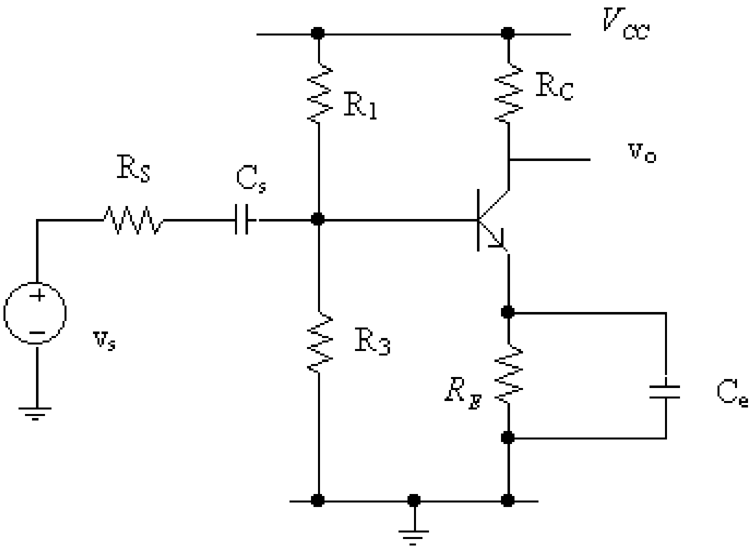
Se consideriamo l'espressione $A(s)=k\cdot\frac{(s-z_1)\cdot(s-z_2)}{a_2\cdot s^2+a_1\cdot s+a_0}$, allora si ha:

$$\omega_l=\frac{a_1}{a_2}\quad\text{e più in generale}\quad\omega_l=\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

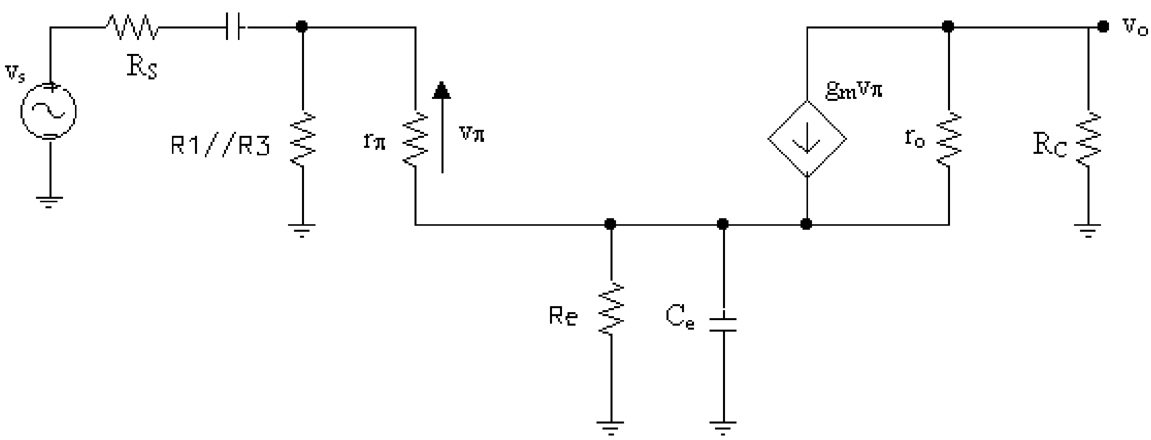
Questo sempre nelle ipotesi che il polo dominante sia ad una frequenza molto maggiore delle altre e che gli zeri siano a frequenze molto più basse delle frequenze dei poli.

STADIO AD EMETTITORE COMUNE

Vediamo come esempio l'emettitore comune realizzato con componenti discreti :



Ci poniamo il problema di dimensionare il valore delle capacità per garantire un valore minimo alla frequenza di taglio inferiore (ci viene quindi assegnato il valore di ω_l e ci viene chiesto di dimensionare le capacità in modo che il circuito presenti la frequenza di taglio assegnata). Consideriamo il circuito per piccoli segnali:



Per risolvere questo problema, si applica il metodo delle costanti di tempo in cortocircuito. Il metodo dice che la frequenza di taglio inferiore è stimabile mediante la relazione

$$\omega_l \cong \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\tau^{S}_{C_i}}\right)$$

Ci sono due costanti di tempo nel circuito in esame e per il dimensionamento delle capacità si fa l'ipotesi che una costante sia molto più piccola dell'altra (una almeno 10 volte più grande dell'altra); in questo modo, ω_l viene determinata completamente dalla costante di tempo più piccola, che quindi sarà pari all'inverso della frequenza di taglio inferiore.

Per fare in modo che questa ipotesi sia verificata, si sceglie la capacità che vede ai suoi capi la resistenza minore. In questo caso, per la C_E si ha che la resistenza ai suoi capi è data dal parallelo di R_E e ciò che si vede dall'emettitore del transistor diviso β+1:

$$R_{C_E} = R_E // \left(\frac{r_\pi + R_1 // R_3 // R_S}{\beta + 1} \right) \cong R_E // \left(\frac{1}{g_m} \right)$$

Per la C_S si ha invece più banalmente che

$$R_{C_S} = R_S + R_1 // R_3 // r_\pi$$

E' evidente che, per i valori che in genere hanno le resistenze, è la C_E quella che vede ai suoi capi una resistenza minore; in base a questa considerazione possiamo scrivere:

$$\omega_1 \cong \frac{1}{\tau^S_{C_E}} = \frac{1}{C_E \cdot R_{C_E}} \qquad \Rightarrow \qquad C_E = \frac{1}{\omega_1 \cdot R_{C_E}}$$

Per dimensionare l'altra capacità, imponiamo che la sua costante di tempo sia almeno dieci volte maggiore; in questo modo otteniamo:

$$\tau^S_{C_S} = C_S \cdot R_{C_S} = 10 \cdot \tau^S_{C_E} \qquad \Rightarrow \qquad C_S = \frac{10 \cdot \tau^S_{C_S}}{R_{C_S}} = \frac{10}{\omega_1 \cdot R_{C_S}}$$

In questo caso, si è praticamente applicato il metodo delle costanti di tempo partendo dai valori delle costanti per valutare il valore dei parametri degli elementi circuitali.

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
e-mail: sandry@iol.it
sito personale: http://users.iol.it/sandry
succursale: http://digilander.iol.it/sandry1