

Appunti di ELETTRONICA - Capitolo 16

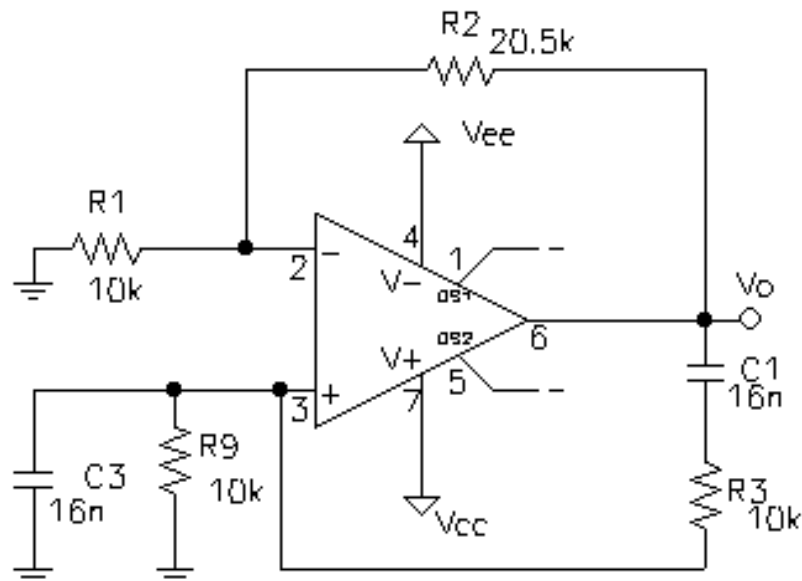
Oscillatori

Introduzione	1
Oscillatori sinusoidali	3
Premesse teoriche	3
Oscillatore a resistenza negativa: uso del diodo tunnel	6
Oscillatore a ponte di Wien	9
Osservazione	13
Limitazione dell'ampiezza dell'oscillazione	14
Oscillatore a 3 punti (mediante op-amp e mediante transistori)	15
Configurazione Colpitts a BJT	17
Configurazione Hartley a BJT	18
Osservazione	19
Oscillatore a cristallo	19
Oscillatore di Pierce	22
Oscillatori non lineari	23
Premesse	23
Multivibratore astabile a trigger di schmitt (o anche op-amp clock)	23
Generatore di onde triangolari a Trigger di Schmitt	28
Ring oscillator	

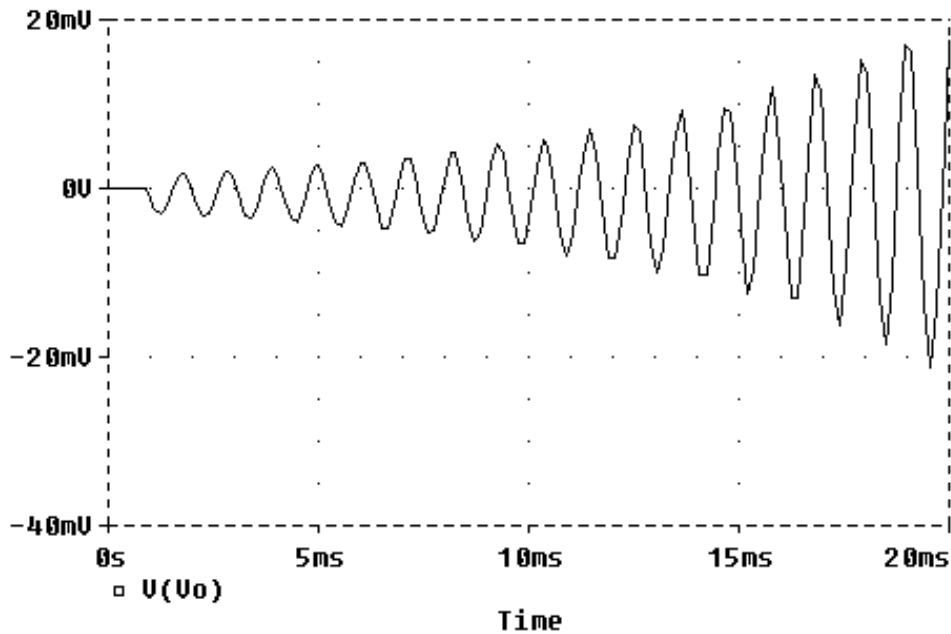
INTRODUZIONE

Un **oscillatore** è un circuito che presenta un segnale di uscita $v_o(t)$, periodico, anche quando non è eccitato da alcun ingresso. La presenza di questo segnale non nullo si ottiene, sotto le condizioni di cui si parlerà tra un attimo, semplicemente alimentando il circuito.

Tanto per fare un esempio concreto, prima di scendere nei dettagli teorici, consideriamo il seguente circuito (nel quale sono indicati dei valori numerici utili per una simulazione P-Spice):



Questo circuito prende il nome di **ponte di Wien** (realizzato in questo caso mediante l'amplificatore operazionale $\mu\text{A-741}$) ed è progettato in modo da generare in uscita, non appena vengono accese le due alimentazioni (rispettivamente $V_{cc}=+15\text{V}$ e $V_{ee}=-15\text{V}$), una oscillazione a frequenza 1kHz, come quella indicata nella figura seguente (frutto di una simulazione con P-Spice):



L'oscillazione è inizialmente di ampiezza crescente, come nella finestra appena riportata, ma poi si stabilizza (assumendo cioè ampiezza praticamente costante), per motivo che chiariremo in questo capitolo.

In generale, si distinguono due fondamentali categorie di oscillatori:

- gli **oscillatori sinusoidali** sono tali da fornire in uscita una sinusoide di ampiezza costante: rientrano in questa categoria l'oscillatore a diodo tunnel, l'oscillatore a sfasamento, il ponte di Wien citato poco fa e l'oscillatore a tre punti ;
- gli **oscillatori non lineari** sono invece tali da fornire in uscita onde quadre e/o onde triangolari: rientrano in questa categoria il ring oscillator ed i multivibratori (monostabili o bistabili).

Il funzionamento degli oscillatori sinusoidali è molto diverso da quello degli oscillatori non lineari.

In entrambi i tipi di oscillatori, la frequenza di oscillazione può essere resa estremamente stabile mediante dei **cristalli piezoelettrici**, dei quali sarà dato qualche cenno.

Oscillatori sinusoidali

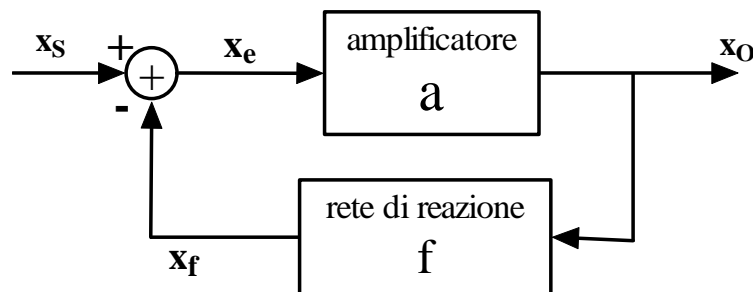
PREMESSE TEORICHE

Cominciamo a capire quali condizioni si devono verificare affinché un circuito si comporti da **oscillatore sinusoidale**, ossia presenti una uscita (tensione o corrente) sinusoidale in assenza di ingresso.

Intuitivamente, ci si rende conto che *per soddisfare questa condizione è necessario che il circuito presenti al suo interno un cammino di retroazione*: esso potrà generare un'oscillazione sinusoidale, che si autosostiene nel tempo, solo se esiste una ben precisa frequenza ω_0 per la quale il segnale, percorrendo l'anello, si ritrova perfettamente in fase con se stesso al punto di partenza. Questo, però, non basta: si deve aggiungere la condizione per cui il modulo del guadagno d'anello T è maggiore di uno alla frequenza ω_0 , altrimenti il segnale, percorrendo l'anello, si andrebbe a smorzare progressivamente nel tempo.

In linea di principio, per avere oscillazione di ampiezza costante alla frequenza ω_0 , il modulo del guadagno d'anello dovrebbe essere rigorosamente pari ad uno, in quanto, se fosse maggiore di 1, il segnale tenderebbe a crescere in ampiezza nel tempo. Tuttavia, è evidente che la condizione $|T(j\omega_0)|=1$ non può essere imposta con precisione (sappiamo che i parametri sono soggetti a continue variazioni), per cui è *necessario porre il modulo del guadagno di $T(j\omega_0)$ leggermente maggiore dell'unità, facendo poi in modo che le non linearità del circuito provvedano a limitare il segnale stesso*.

Consideriamo a tal proposito un classico circuito lineare retroazionato, schematizzato secondo lo schema a blocchi di una retroazione ideale:



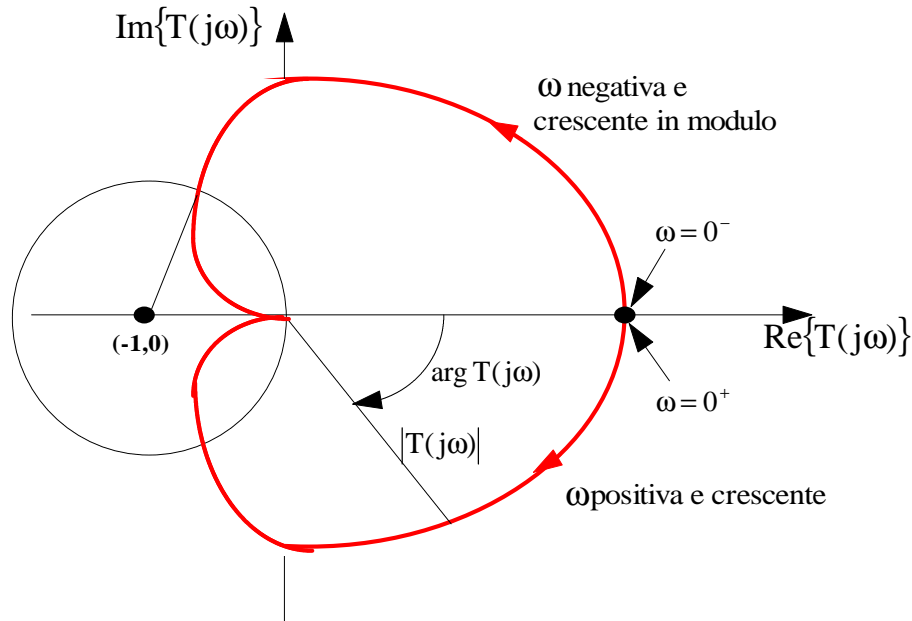
Sappiamo bene che la funzione di risposta armonica di un simile circuito è esprimibile nella forma seguente:

$$A(j\omega) = \frac{a(j\omega)}{1 + f(j\omega)a(j\omega)} = \frac{a(j\omega)}{1 + T(j\omega)}$$

Abbiamo inoltre studiato in precedenza quali sono le condizioni che garantiscono la stabilità di questo circuito reazionato: in base al *criterio di stabilità di Nyquist*, infatti, la stabilità (ovviamente asintotica) del circuito si ha se il diagramma polare di $T(j\omega)$ non circonda il punto critico $-1+j0$, il che significa, in termini di *margini di stabilità*, che il margine di fase del sistema in anello aperto deve essere positivo. In termini di posizione dei poli del sistema in anello chiuso, l'asintotica stabilità si ha se e solo se non ci sono *poli* nel semipiano destro di Gauss.

Allora, volendo fare di questo circuito un oscillatore, è necessario violare il criterio di stabilità, scegliendo opportunamente i parametri dell'anello di reazione. Occupiamoci proprio di questo aspetto.

Consideriamo un sistema in anello chiuso il cui guadagno di anello $T(j\omega)$ abbia il seguente diagramma polare:



E' facile capire che il vettore che congiunge il punto critico $-1+j0$ con un qualsiasi punto $T(j\omega)$ del diagramma polare ha modulo $1+T(j\omega)$; allora, in corrispondenza di tutti i punti del diagramma che si trovano all'interno del cerchio tratteggiato (che ha centro nel punto critico e raggio unitario), è evidente che risulta $1+T(j\omega)<1$, il che significa che, in tali, punti, $T(j\omega)$ risulta negativo, ossia che la reazione risulta positiva.

In altre parole, esistono dei valori di frequenza cui corrisponde un valore negativo di $T(j\omega)$ e quindi una reazione positiva. Nonostante questo, però, il sistema non va in oscillazione, in corrispondenza di queste particolari frequenze, in quanto il sistema è stabile: il diagramma polare, infatti, non circonda il punto critico, per cui il criterio di stabilità di Nyquist esclude che si possa verificare una oscillazione.

Allora, se vogliamo realizzare un oscillatore, dobbiamo agire sui parametri della rete in modo tale da realizzare una particolare condizione: il diagramma polare deve passare per il punto critico $-1+j0$: in questo caso, infatti, esiste una frequenza ω_0 in corrispondenza della quale risulta $T(j\omega_0)=-1$ e quindi risulta anche

$$A(j\omega_0) = \frac{a(j\omega_0)}{1+T(j\omega_0)} = \frac{a(j\omega_0)}{1+(-1)} = \infty$$

Se si verifica la condizione $A(j\omega_0) = \infty$, siamo in condizioni di instabilità e quindi è possibile che si inneschino delle oscillazioni alla frequenza ω_0 .

E' bene inoltre precisare che, per ottenere un oscillatore (e non un amplificatore che oscilla) è necessario che la condizione $A(j\omega) = \infty$ si verifichi in corrispondenza di una sola frequenza o, tutt'al più, in corrispondenza di un intervallo estremamente ristretto di frequenze.

In base a queste considerazioni, dunque, la condizione per ottenere oscillazione è quella per cui $T(j\omega)=-1$, che, in termini di modulo e fase, corrisponde anche a

$ T(j\omega) = 1$ $\text{ph}T(j\omega) = -180^\circ$
--

Queste due relazioni definiscono il cosiddetto **criterio di Barkhausen per l'oscillazione dei circuiti lineari**.

Supponiamo allora che la seconda condizione sia verificata per una data frequenza ω_0 . Resta da verificare la seconda condizione. A livello puramente teorico, possiamo allora affermare quanto segue:

- se $|T(j\omega_0)|=1$, anche rimuovendo il segnale di ingresso esiste sempre in ingresso al circuito un segnale sinusoidale alla frequenza ω_0 ;
- se $|T(j\omega_0)|<1$, rimuovendo il segnale esterno le eventuali oscillazioni presenti cessano dopo un tempo più o meno lungo;
- se $|T(j\omega_0)|>1$, infine, le oscillazioni eventuali aumentano indefinitamente la propria ampiezza.

Di queste tre affermazioni, solo la seconda è vera nella realtà:

- anche nell'ipotesi di riuscire a realizzare inizialmente la condizione $|T(j\omega_0)|=1$, essa non potrà mai durare nel tempo, in quanto le inevitabili variazioni parametriche dei dispositivi coinvolti, le variazioni delle tensioni di alimentazione, gli sbalzi di temperatura fanno sì che essa venga violata, ossia che $T(j\omega_0)$ diventi maggiore o minore di 1; questo significa, in altri termini, che non è mai possibile realizzare una condizione di oscillazione permanente perfetta (cioè appunto $|T(j\omega_0)|=1$), mentre si riesce solo ad approssimare più o meno bene tale condizione di funzionamento; in particolare, si fa generalmente in modo che risulti $|T(j\omega_0)|=1.05$ alla frequenza ω_0 desiderata;
- in secondo luogo, se risulta $|T(j\omega_0)|>1$, non è fisicamente possibile che l'ampiezza delle oscillazioni aumenti senza limiti: infatti, questo è possibile solo fin quando sono interessate regioni di funzionamento lineare dei dispositivi; nel momento in cui uno o più dispositivi passano a funzionare in regioni di non linearità (tipicamente la zona di saturazione per i BJT e quella di triodo per i FET), il segnale subisce una inevitabile limitazione.

Pertanto, per imporre la condizione di Barkhausen si fa in modo che, alla frequenza per la quale $\text{ph}T(j\omega_0)=-180^\circ$, si abbia anche $|T(j\omega_0)|>1$, in modo che il circuito, funzionando linearmente, generi un'oscillazione che cresce nel tempo. Quando l'ampiezza delle oscillazioni diventa troppo grande, entrano in gioco le non linearità del circuito (saturazioni dei dispositivi) che vanno ad opporsi alla crescita delle oscillazioni; *queste due condizioni contrastanti fanno in modo che il circuito si porti da solo alla condizione di equilibrio, cioè alla condizione per la quale l'ampiezza delle oscillazioni rimane costante*.

Inoltre, in queste condizioni è possibile la **reiezione dei disturbi**:

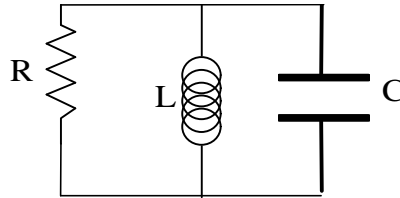
- una attenuazione delle oscillazioni (dovuta ad un disturbo) comporta il ritorno del circuito a funzionare in zona lineare, dove, però, il circuito presenta, per la sua instabilità, la tendenza a far crescere le oscillazioni;
- un aumento delle oscillazioni viene invece contrastato dalle non linearità del circuito che impediscono al segnale di crescere ulteriormente¹.

¹ Per definire in modo rigoroso le condizioni per la determinazione di un ciclo limite è indispensabile introdurre il concetto di **funzione descrittiva**, ma questo viene fatto in modo esauriente nel corso di controlli automatici.

Infine, a causa delle non linearità, il circuito introduce una notevole distorsione armonica e per questo si deve fare in modo che degli elementi fungano da filtri, affinché si possano eliminare le componenti armoniche indesiderate.

OSCILLATORE A RESISTENZA NEGATIVA: USO DEL DIODO TUNNEL

Consideriamo un circuito RLC parallelo del tipo indicato nella figura seguente:



Supponiamo che le condizioni iniziali siano le seguenti:

$$i_L(0^+) = I_0 \quad (\text{induttore carico})$$

$$v_C(0^+) = V_0 \quad (\text{condensatore carico})$$

Vogliamo determinare la corrente $i_L(t)$ nell'induttore per $t > 0$, dove $t = 0$ è chiaramente l'istante in cui cominciamo la nostra osservazione sul circuito.

Applicando le leggi di Kirchoff e le relazioni di lato degli elementi circuitali presenti, si ottiene facilmente la seguente equazione differenziale del 2° ordine:

$$\frac{di_L(t)}{dt} + \frac{C}{G} \frac{d^2i_L(t)}{dt^2} + \frac{1}{GL} i_L(t) = 0$$

Ponendo allora

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{G}{2C} = \text{fattore di smorzamento} \\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \text{pulsazione di risonanza} \end{array} \right.$$

Possiamo dunque concludere che l'equazione differenziale da risolvere, con le opportune condizioni iniziali, per trovare la corrente nell'induttore è la seguente:

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2i_L}{dt^2} + 2\alpha \frac{di_L}{dt} + \omega_0^2 i_L = 0 \\ i_L(0^+) = I_0 \\ v_C(0^+) = V_0 \end{array} \right.}$$

Trattandosi di una equazione omogenea (conseguenza del fatto che nel circuito manca una sorgente), deduciamo che la risposta del sistema presenta solo il contributo transitorio (che è appunto l'integrale generale dell'equazione omogenea) mentre manca del termine a regime.

Per risolvere l'equazione, dobbiamo per prima cosa risolvere l' "equazione caratteristica" ad essa associata: si tratta della equazione $s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 = 0$, le cui radici sono

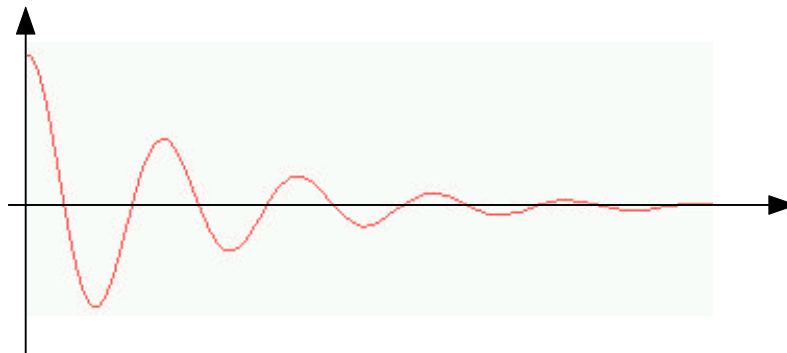
$$s_{1/2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

Queste due radici (dette "frequenze naturali" o anche "autovalori" del circuito) consentono di esprimere l'integrale generale dell'equazione omogenea nella forma seguente:

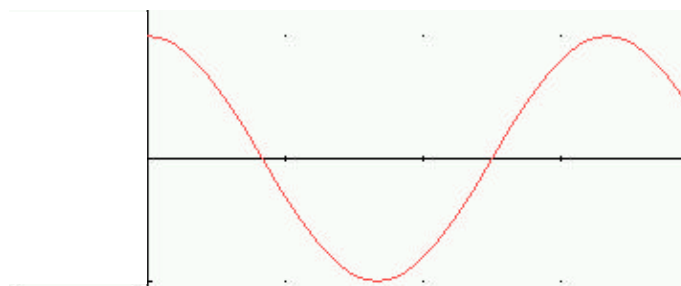
$$i_L(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t}$$

L'andamento temporale di questa forma d'onda dipende dall'espressione delle due frequenze naturali: infatti, si osserva subito che, a seconda dei valori di α e ω_0 , possiamo avere radici reali o complesse, uguali o coniugate. I casi che a noi interessano sono in particolare i seguenti due:

1. $\alpha < \omega_0 \rightarrow$ le radici sono complesse coniugate (circuito in condizioni di "sottosmorzamento"), per cui danno origine ad un unico termine esponenziale smorzato: ponendo $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$, le due radici sono nella forma $s_{1/2} = -\alpha \pm j\omega_d$ e la corrispondente corrente nell'induttore è data da $i_L(t) = K e^{-\alpha t} \cos(\omega_d t - \varphi)$, dove la costante K e l'angolo φ si ricavano dalle due condizioni $K_1 + K_2 = K \cos \varphi$ e $j(K_1 - K_2) = K \sin \varphi$; l'andamento temporale è il seguente:



2. $\alpha = 0 \rightarrow$ le radici sono immaginarie pure nella forma $s_{1/2} = \pm j\omega_d$, il che implica che il circuito non sia più asintoticamente stabile e sia quindi sede di una oscillazione permanente (si parla di "circuito con perdite nulle"); la corrente nell'induttore ha espressione $i_L(t) = K \cos(\omega_0 t - \varphi)$ e quindi ha il seguente andamento temporale:

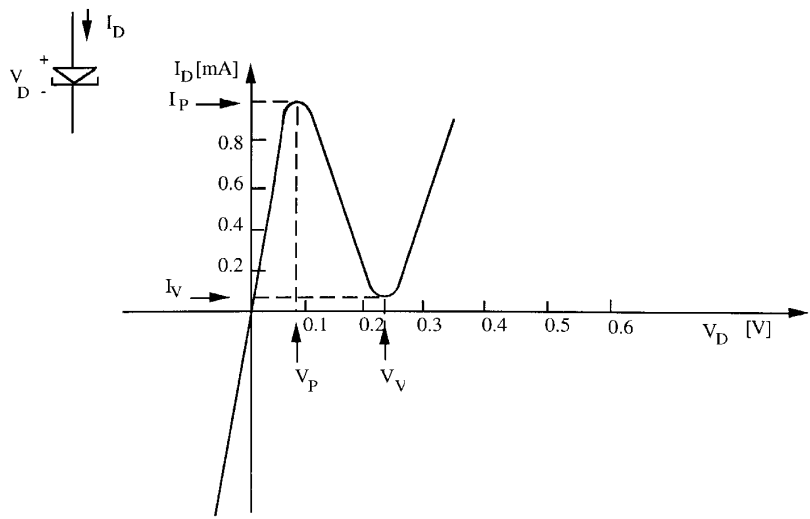


La spiegazione di quest'ultimo tipo di comportamento del circuito è la seguente: dire che $\alpha=0$, considerando che questo fattore è stato definito come $\alpha = \frac{G}{2C}$, equivale a dire che $G=0$ (oppure che

$R=\infty$); ciò significa che il resistore si comporta da circuito aperto, in quanto non lascia passare corrente sul proprio ramo; se non passa corrente attraverso il resistore, non c'è dissipazione di energia su di esso per effetto Joule e quindi l'oscillazione persistente si spiega come scambio continuo di energia tra condensatore e induttore, senza che ci sia alcun fenomeno dissipativo.

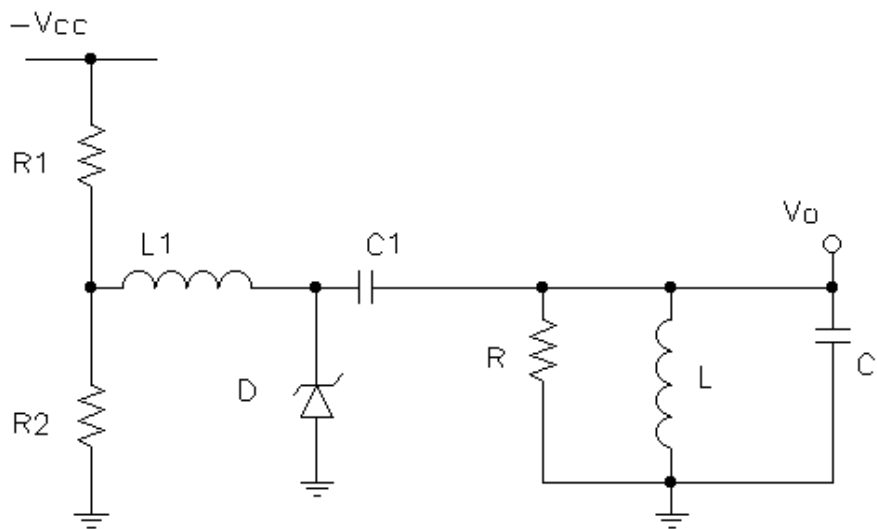
Nella realtà, non è possibile avere una resistenza $R=\infty$, per cui la situazione ideale appena descritta non si può mai realizzare. D'altra parte, si può realizzare una condizione di oscillazione crescente: infatti, nel caso in cui le due frequenze naturali del circuito siano complesse coniugate del tipo $s_{1/2} = -\alpha \pm j\omega_d$, basta fare in modo da avere un coefficiente α negativo, in modo che la forma d'onda $i_L(t) = Ke^{-\alpha t} \cos(\omega_d t - \varphi)$ contenga un termine $e^{-\alpha t}$ esponenziale crescente. Dato che $\alpha = \frac{G}{2C} = \frac{1}{2RC}$, l'unico modo di avere $\alpha < 0$ è quello di prendere **$R < 0$** .

Per ottenere fisicamente una resistenza negativa, si può utilizzare un **diodo tunnel**, che presenta notoriamente un tratto della caratteristica statica I-V a pendenza negativa:



Polarizzando allora il diodo nella regione compresa tra la *tensione di picco* V_P e la *tensione di valle* V_V , si ottiene dal dispositivo un comportamento, sotto segnale, rappresentabile mediante una resistenza negativa, come appunto richiesto per ottenere l'oscillazione.

Il circuito in cui viene sfruttato il principio appena descritto, al fine di ottenere una oscillazione, è indicato nella figura seguente:



In questo circuito, l'induttanza L_1 si comporta come un cortocircuito a bassa frequenza e come un circuito aperto ad alta frequenza: essa, cioè, ha lo scopo di bloccare le componenti in alta frequenza, al fine di migliorare la purezza dell'oscillazione.

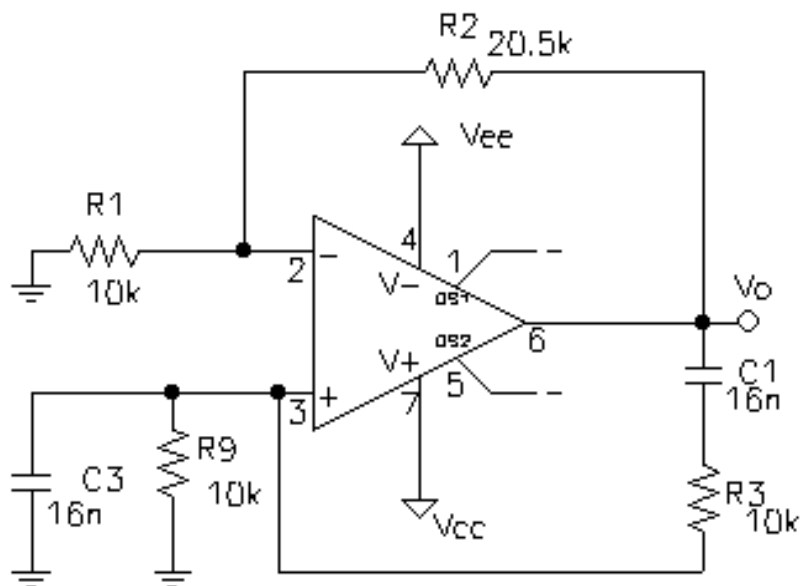
Al contrario, la capacità C_1 serve a bloccare le componenti a bassa frequenza e, quindi, in particolare, la componente continua di segnale: questo serve a fare in modo che il partitore di tensione formato dalla serie R_1+R_2 non venga influenzato dal parallelo RLC e quindi fornisca corretta la tensione di polarizzazione ai capi del diodo tunnel.

Una volta effettuata la polarizzazione, il comportamento sotto segnale del circuito è semplicemente quello di un parallelo RLC dove la resistenza è data dal parallelo di R con la resistenza di conduzione del diodo: essendo quest'ultima negativa, il circuito si mette ad oscillare alla pulsazione di risonanza tipica del circuito RLC parallelo, ossia $\omega_0 = \frac{1}{LC}$. *L'ampiezza dell'oscillazione cresce col tempo fin quando il diodo si comporta linearmente.*

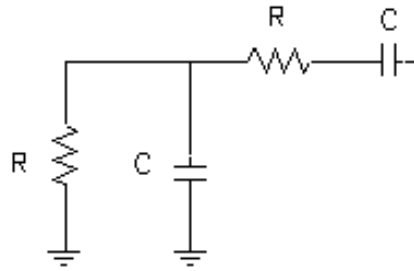
Il principale vantaggio di questo circuito è quello di poter essere impiegato anche a frequenze molto elevate (al contrario, invece, di altri oscillatori impieganti per esempio gli amplificatori operazionali, che hanno maggiori limitazioni in frequenza). Il principale svantaggio è invece che le oscillazioni non possono raggiungere una ampiezza molto elevata, in conseguenza del fatto che il diodo tunnel si comporta linearmente (con resistenza di conduzione negativa) entro un intervallo di tensione non molto ampio.

OSCILLATORE A PONTE DI WIEN

Lo schema circuitale di questo oscillatore è il seguente:

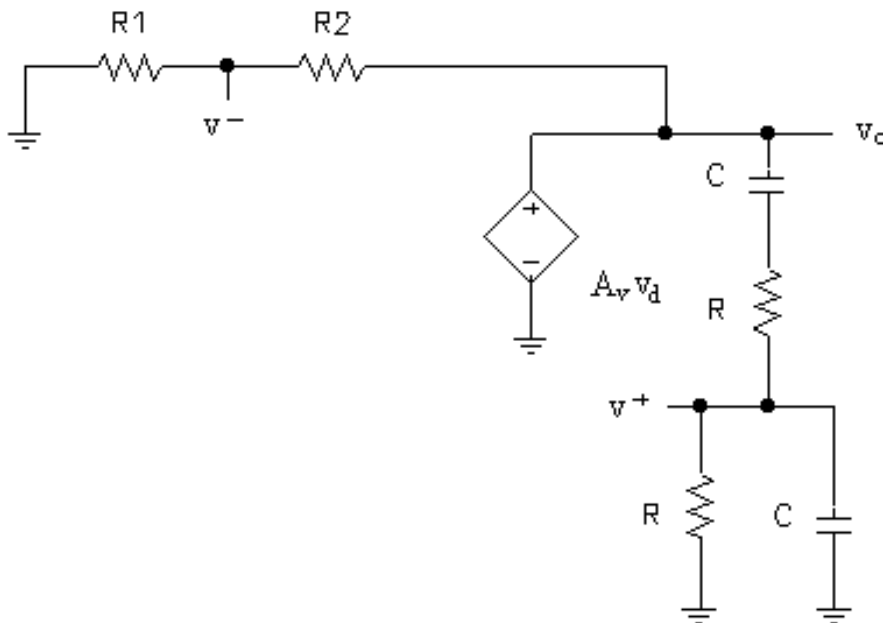


Esso è composto da un amplificatore operazionale in configurazione invertente (con resistenze R_1 ed R_2) e presenta, tra il nodo di uscita ed il morsetto non invertente, un secondo percorso di reazione composto dalla rete RC indicata nella figura seguente:



Questa rete serve evidentemente a sfasare in modo opportuno il segnale proveniente dall'uscita.

Per capire se il circuito può comportarsi da oscillatore e, in caso affermativo, a quale frequenza possa oscillare, andiamo a calcolare il rapporto di ritorno $\theta_i(j\omega)$, facendo ovviamente riferimento al circuito equivalente per piccoli segnali (nel quale assumiamo per l'operazionale un comportamento ideale, vale a dire resistenza di ingresso infinita, resistenza di uscita nulla e assenza di qualsiasi effetto capacitivo):



E' presente un unico generatore pilotato, per cui applichiamo la sovrapposizione rispetto ad esso: poniamo perciò $A_v \hat{v}_{id}$ la forma d'onda di tale generatore. Inoltre indichiamo con z_s l'impedenza della serie tra il resistore e il condensatore e con z_p l'impedenza del parallelo fra l'altro resistore e l'altro condensatore. Possiamo scrivere che

$$v_o = A_v \cdot \hat{v}_{id} \qquad v^+ = v_o \cdot \frac{z_p}{z_s + z_p} \qquad v^- = v_o \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Combinando queste relazioni si ottiene

$$v_{id} = v^+ - v^- = A_v \cdot \hat{v}_{id} \cdot \left[\frac{z_p}{z_s + z_p} - \frac{R_1}{R_1 + R_2} \right]$$

per cui il rapporto di ritorno vale

$$\theta(s) = -\frac{v_{id}}{\hat{v}_{id}} = A_V \left[\frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{z_p}{z_s + z_p} \right]$$

dove, ovviamente, la dipendenza di θ dalla variabile $s=j\omega$ deriva dal fatto che le impedenze z_p e z_s , tramite le rispettive reattanze, dipendono da s .

A questo punto, affinché il circuito possa comportarsi da oscillatore deve essere verificata la condizione $\theta(s) = -1$ (che equivale ovviamente alla condizione $v_{id} = \hat{v}_{id}$):

$$A_V \left[\frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{z_p}{z_s + z_p} \right] = -1$$

Questa può anche essere riscritta portando A_V al denominatore del secondo membro: d'altra parte, il termine $1/A_V$, essendo A_V generalmente molto grande, si può con buona approssimazione confondere con 0, per cui la condizione da imporre diviene

$$\frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{z_p}{z_s + z_p} \cong 0 \longrightarrow \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{z_p}{z_s + z_p}$$

A questo punto, è semplice trovare che $\frac{z_p}{z_s + z_p} = \frac{sRC}{1 + 3sRC + s^2R^2C^2}$, per cui, sostituendo, abbiamo che

$$\frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{sRC}{1 + 3sRC + s^2R^2C^2}$$

Se adesso ci mettiamo in condizioni di regime, possiamo porre $s=j\omega$ al fine di passare dalla frequenza complessa s alla frequenza reale ω^2 :

$$\frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{j\omega RC}{1 + j3\omega RC - \omega^2 R^2 C^2}$$

Abbiamo allora una uguaglianza tra una quantità reale (primo membro) ed una complessa (secondo membro): l'unica possibilità per cui tale uguaglianza sia soddisfatta è che il secondo membro risulti reale, il che avviene quando $1 - \omega^2 R^2 C^2 = 0$: questa è dunque la condizione dalla quale si ricava la possibile frequenza di oscillazione del circuito, che risulta essere

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}$$

² Ricordiamo che l'operazione di porre $s=j\omega$ per passare dalla funzione di trasferimento alla funzione di risposta armonica ha senso fisico solo nell'ipotesi che il sistema considerato sia asintoticamente stabile.

Questa è dunque la frequenza alla quale il circuito può oscillare. Si tratta, adesso, di verificare se il circuito oscilla effettivamente a questa frequenza, cosa che avviene se e solo se risulta $|\theta(j\omega_0)| > 1$: dato che

$$\theta(j\omega) = A_v \left[\frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{z_p}{z_s + z_p} \right] = A_v \left[\frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{j\omega RC}{1 + j3\omega RC - \omega^2 R^2 C^2} \right]$$

ponendo $\omega = \omega_0$ otteniamo

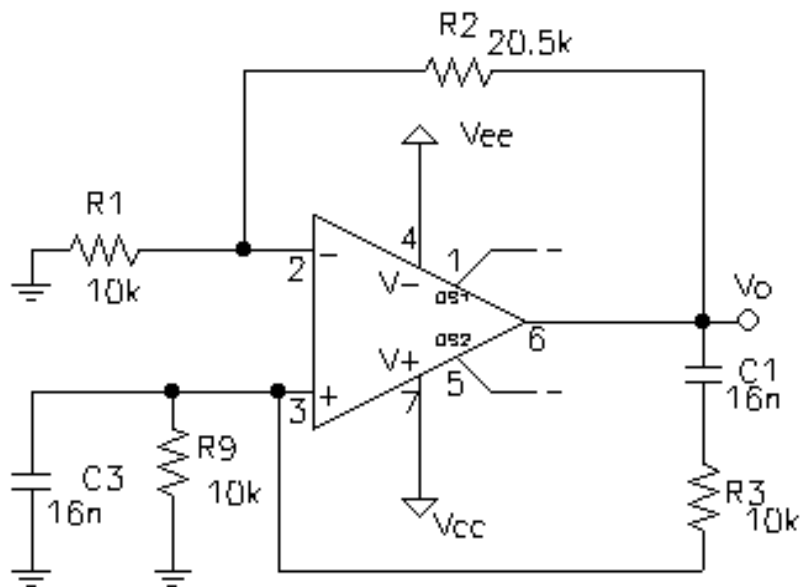
$$\theta(j\omega_0) = A_v \left[\frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{1}{3} \right]$$

Questa è una quantità reale che quindi coincide con il suo modulo: imponendo allora che risulti $|\theta(j\omega_0)| > 1$, troviamo che

$$A_v \left[\frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{1}{3} \right] > 1 \longrightarrow \frac{R_1}{R_1 + R_2} - \frac{1}{3} > \frac{1}{A_v} \cong 0 \longrightarrow \frac{R_1}{R_1 + R_2} > \frac{1}{3} \longrightarrow \boxed{R_2 > 2R_1}$$

La conclusione è dunque che il ponte di Wien oscilla alla frequenza $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ solo a patto che R_2 risulti maggiore del doppio di R_1 . Idealmente, basterebbe avere $R_2 = 2R_1$ per ottenere una oscillazione permanente alla frequenza ω_0 ; nella realtà, invece, abbiamo detto in precedenza che il modulo di $T(j\omega_0)$ deve essere maggiore di 1 e questo è appunto il motivo per cui deve risultare $R_2 > 2R_1$.

Un esempio pratico di dimensionamento dei vari parametri della rete è il seguente:



Questo oscillatore presenta $R_2 > 2R_1$, per cui oscilla alla frequenza $f_0 = \frac{1}{2\pi RC} \cong 1\text{kHz}$.

Osservazione

Al tendere della frequenza di oscillazione al valore della frequenza di transizione f_T dell'amplificatore operazionale, si fa sentire l'effetto del guadagno finito e della fase di $A_V(s)$ sulle prestazioni dell'oscillatore.

Approssimando $A_V(s) = \frac{1}{s\tau}$ in vicinanza della f_T , si ha che il guadagno dello stadio non invertente (senza considerare la retroazione esercitata da z_S e z_P , cioè considerando un ingresso v_i sul morsetto positivo) è

$$\frac{v_O}{v_i} = \frac{A_\infty \theta + A_D}{1 + \theta} \cong \frac{A_\infty \theta}{1 + \theta} = \frac{A_\infty}{1 + \frac{1}{\theta(s)}} = \frac{1 + \frac{R_2}{R_1}}{1 + \frac{1}{\theta(s)}}$$

dove $A_D=0$ se la resistenza di uscita dell'OPAMP è approssimativamente nulla..

Con riferimento al solo stadio invertente, abbiamo che $\theta(s) = A_V(s) \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{1}{s\tau} \frac{R_1}{R_1 + R_2}$, per cui possiamo scrivere che

$$\frac{v_O}{v_i}(s) = \frac{1 + \frac{R_2}{R_1}}{1 + \frac{1}{\frac{1}{s\tau} \frac{R_1}{R_1 + R_2}}} = \frac{1 + \frac{R_2}{R_1}}{1 + s\tau \frac{R_1 + R_2}{R_1}} = \frac{\frac{R_1 + R_2}{R_1}}{1 + s\tau \frac{R_1 + R_2}{R_1}}$$

Per $s=0$, da questa formula otteniamo

$$\frac{v_O}{v_i}(s=0) = \frac{R_1 + R_2}{R_1}$$

mentre, invece, per $s \cong 1/\tau$, ossia per $j\omega \cong 1/\tau$, otteniamo

$$\frac{v_O}{v_i} \left(s = \frac{1}{\tau} \right) = \frac{\frac{R_1 + R_2}{R_1}}{1 + j \frac{R_1 + R_2}{R_1}}$$

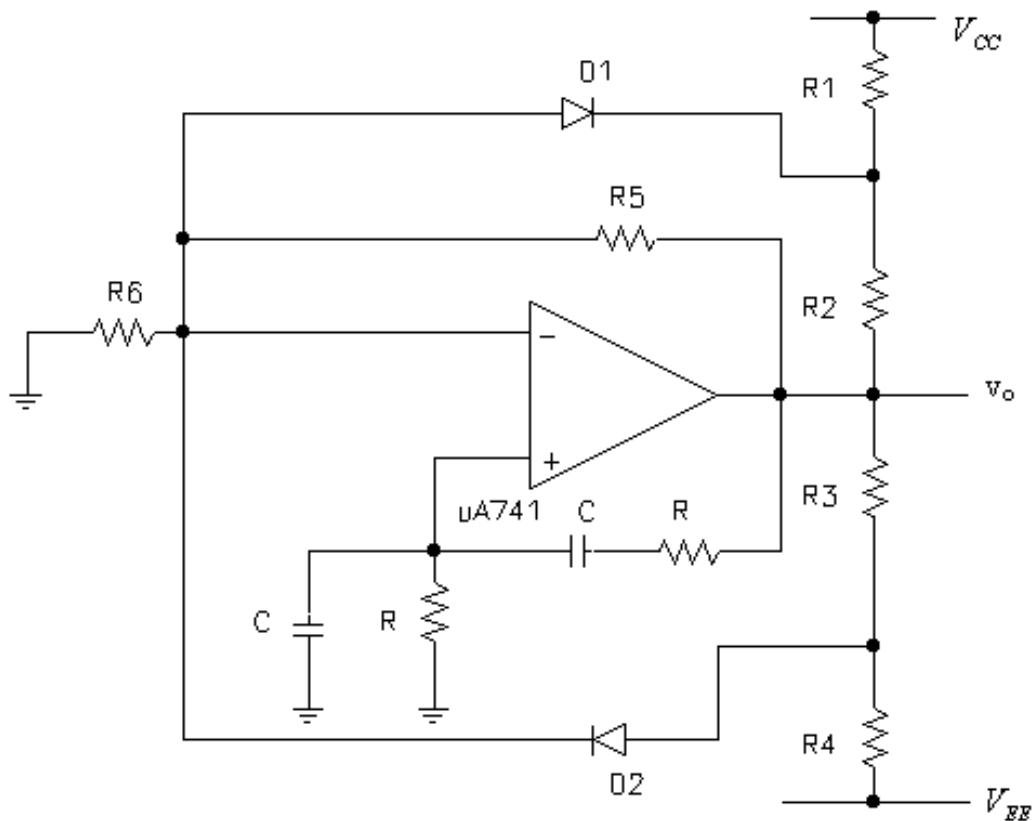
ossia otteniamo una rotazione di fase sensibile del guadagno v_O/v_i .

Questo vuol dire che se vogliamo operare a frequenze elevate, dobbiamo tener conto di $A_V(s)$ e dobbiamo modificare il circuito. A frequenze più basse, quando la limitazione dell'ampiezza della v_O è dovuta alla non linearità del circuito, le limitazioni al funzionamento del circuito sono dovute proprio all'ampiezza della sinusoide e quindi la banda di potenza dell' OPAMP è quella che va considerata:

$$f_P = \frac{SR}{2\pi V_m}$$

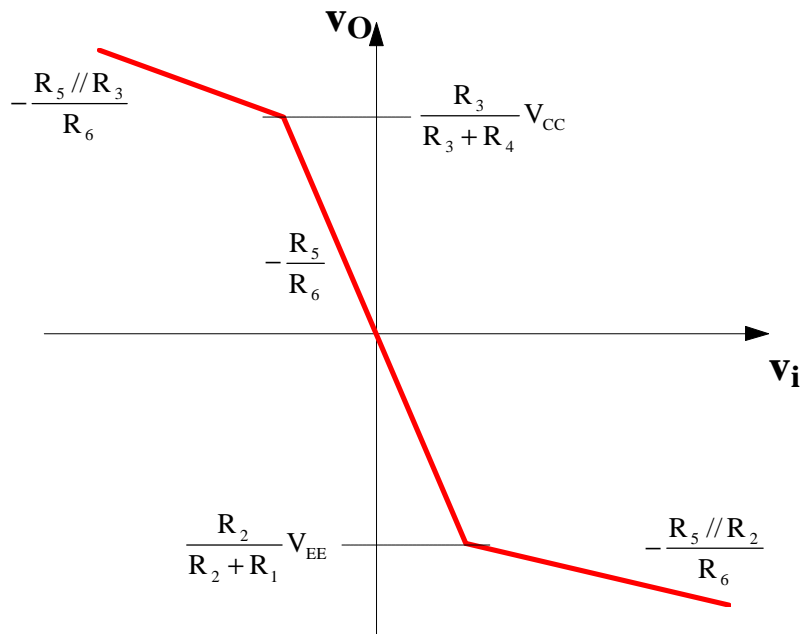
LIMITAZIONE DELL'AMPIEZZA DELL'OSCILLAZIONE

Il fatto di prendere $R_2 > 2R_1$ nell'oscillatore a ponte di Wien appena descritto comporta, come detto, che il guadagno d'anello abbia modulo maggiore di 1 (sia pure di poco) alla frequenza di oscillazione ω_0 . In queste condizioni, le oscillazioni tendono a crescere e quindi si deve cercare di limitare in qualche modo questo fenomeno. In molti casi sono i dispositivi attivi stessi a limitare le oscillazioni (per questo si parla di **oscillatori autolimitanti**), ma in altri casi è necessario ricorrere a circuiti aggiuntivi, affinché questa condizione venga rispettata. Un esempio di **circuito limitatore di ampiezza** è dato nella seguente figura :



Questo è ancora un oscillatore a ponte di Wien, con in più un sistema per la limitazione dell'ampiezza delle oscillazioni; infatti i 4 resistori R_1 R_2 R_3 R_4 servono a fissare la tensione sul catodo di D_1 e sull'anodo di D_2 a valori più bassi dell'alimentazione; in questo modo, quando l'ampiezza del segnale sul morsetto invertente dell'amplificatore supera il valore di tensione sul catodo di D_1 , il diodo D_1 passa a condurre, mettendo così in parallelo a R_5 il resistore R_2 ; in modo analogo, quando la tensione sul morsetto invertente scende sotto il valore di tensione dell'anodo di D_2 , il diodo D_2 passa a condurre, mettendo in parallelo a R_5 il resistore R_3 . In entrambi i casi (sia escursione positiva sia negativa), con l'accensione dei diodi viene ridotto il guadagno d'anello complessivo, con la conseguenza di far diventare il circuito stabile.

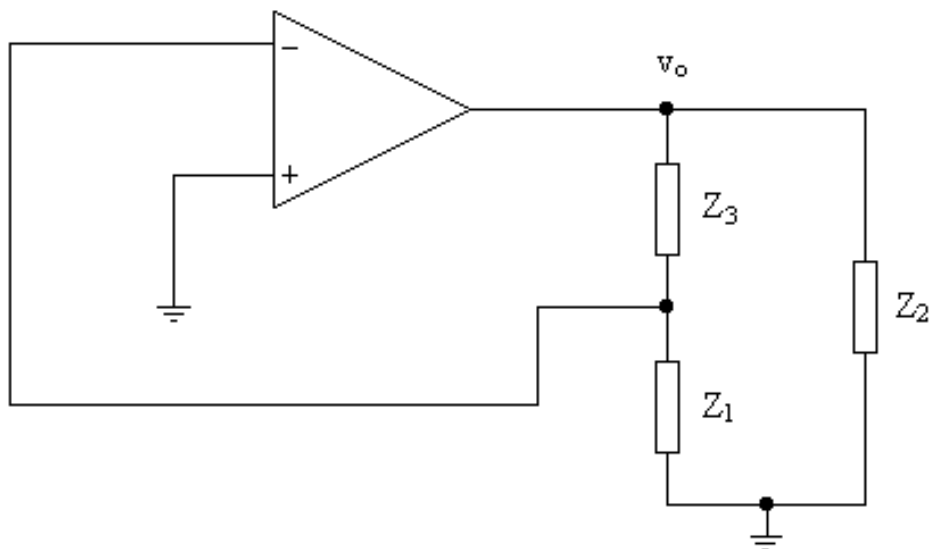
Questa operazione equivale a rendere meno pendente la caratteristica statica dell'amplificatore oltre i valori di tensione fissati dalle 4 resistenze. La figura seguente chiarisce il concetto:



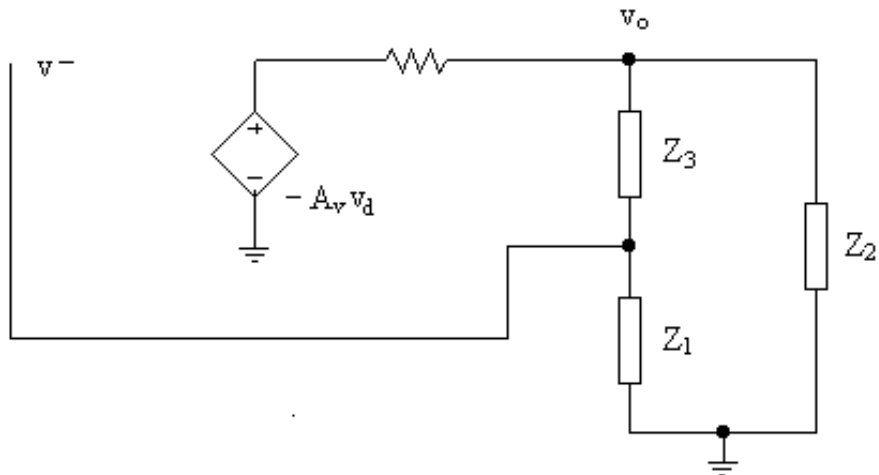
Quando la resistenza di reazione R_5 diventa molto elevata ($R_5 \rightarrow \infty$), il circuito diventa praticamente un comparatore invertente.

OSCILLATORE A 3 PUNTI (MEDIANTE OP-AMP E MEDIANTE TRANSISTORI)

L'oscillatore a 3 punti, realizzato mediante un amplificatore operazionale, è rappresentato nella figura seguente:



Consideriamo il circuito equivalente lineare:



Calcoliamo il rapporto di ritorno del generatore di tensione pilotato. L'impedenza di carico equivalente è $Z_L = Z_2 // (Z_1 + Z_3)$ e quindi si ha:

$$Z_L = \frac{Z_2 \cdot (Z_1 + Z_3)}{Z_1 + Z_2 + Z_3}$$

La tensione v_o risulta

$$v_o = -A_v \cdot \hat{v}_d \cdot \frac{Z_L}{R_o + Z_L} = -A_v \cdot \hat{v}_d \cdot \frac{Z_2 \cdot (Z_1 + Z_3)}{Z_1 + Z_2 + Z_3} \cdot \frac{1}{R_o + \frac{Z_2 \cdot (Z_1 + Z_3)}{Z_1 + Z_2 + Z_3}}$$

Moltiplicando numeratore e denominatore per la somma delle impedenze si ottiene:

$$v_o = -A_v \cdot \hat{v}_d \cdot \frac{Z_2 \cdot (Z_1 + Z_3)}{R_o \cdot (Z_1 + Z_2 + Z_3) + Z_2 \cdot (Z_1 + Z_3)}$$

Inoltre si ha $v^- = v_d = v_o \cdot \frac{Z_1}{Z_1 + Z_3}$, per cui, combinando le due ultime relazioni, si ottiene

$$v_d = v_o \cdot \frac{Z_1}{Z_1 + Z_3} = -A_v \cdot \hat{v}_d \cdot \frac{Z_2 \cdot (Z_1 + Z_3)}{R_o \cdot (Z_1 + Z_2 + Z_3) + Z_2 \cdot (Z_1 + Z_3)} \cdot \frac{Z_1}{Z_1 + Z_3}$$

e quindi

$$v_d = -A_v \cdot \hat{v}_d \cdot \frac{Z_2 \cdot Z_1}{R_o \cdot (Z_1 + Z_2 + Z_3) + Z_2 \cdot (Z_1 + Z_3)}$$

In definitiva, il rapporto di ritorno vale

$$\theta(s) = -\frac{v_d}{\hat{v}_d} = \frac{A_v \cdot Z_2 \cdot Z_1}{R_o \cdot (Z_1 + Z_2 + Z_3) + Z_2 \cdot (Z_1 + Z_3)}$$

Se le tre impedenze sono pure reattanze ($Z_i = jX_i$) allora il rapporto di ritorno risulta :

$$\theta(j\omega) = -\frac{A_v \cdot X_2 \cdot X_1}{j \cdot R_o \cdot (X_1 + X_2 + X_3) - X_2 \cdot (X_1 + X_3)}$$

con $X_1 = \omega L$ se l'impedenza è un'induttanza, mentre $X_1 = -\frac{1}{\omega C}$ se l'impedenza è una capacità.

Bisogna trovare una frequenza per la quale il rapporto di ritorno è uguale a -1 ; per far ciò, essendo reale il numeratore, si dovrà fare in modo che anche il denominatore lo sia. E' evidente che per soddisfare questa condizione deve risultare $X_1 + X_2 + X_3 = 0$, non potendo essere nulla la R_o (la resistenza d'uscita dell'amplificatore deve essere necessariamente diversa da zero, altrimenti l'oscillatore non può oscillare, poiché verrebbe inibita la reattanza X_2).

In base a queste ipotesi il rapporto di ritorno si riduce a

$$\theta(j\omega) = \frac{A_v \cdot X_2 \cdot X_1}{X_2 \cdot (X_1 + X_3)}$$

Essendo $X_1 + X_2 + X_3 = 0$ allora si può porre $X_1 + X_3 = -X_2$ e quindi si ottiene :

$$\theta(j\omega) = -\frac{A_v \cdot X_2 \cdot X_1}{X_2 \cdot X_2} = -\frac{A_v \cdot X_1}{X_2}$$

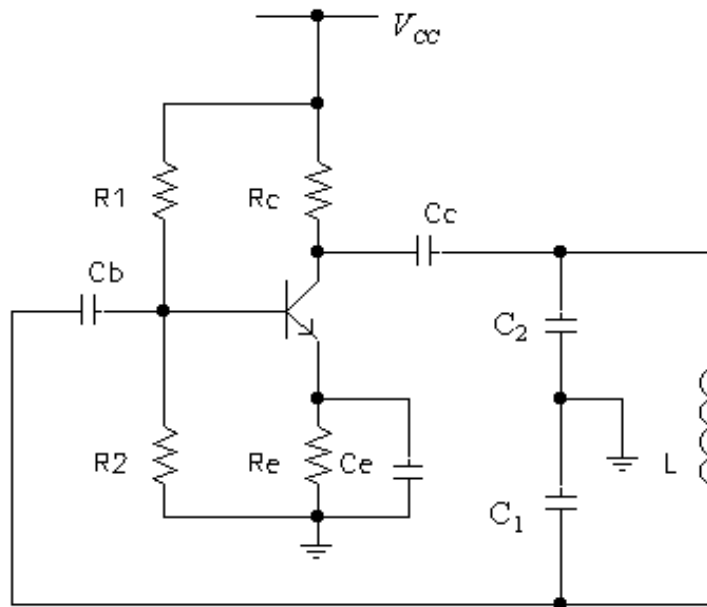
Il rapporto di ritorno deve risultare negativo e, in modulo, prossimo all'unità: è necessario quindi che X_1 e X_2 abbiano lo stesso segno, ossia siano reattanze dello stesso tipo. Allora si presentano 2 casi:

1. X_1 e X_2 sono due capacità, mentre X_3 è un'induttanza
2. X_1 e X_2 sono due induttanze, mentre X_3 è una capacità

Nel primo caso si parla di **oscillatori di Colpitts**, mentre nel secondo caso di **oscillatori di Hartley**.

Configurazione Colpitts a BJT

Vediamo la versione a BJT dell'oscillatore di Colpitts:



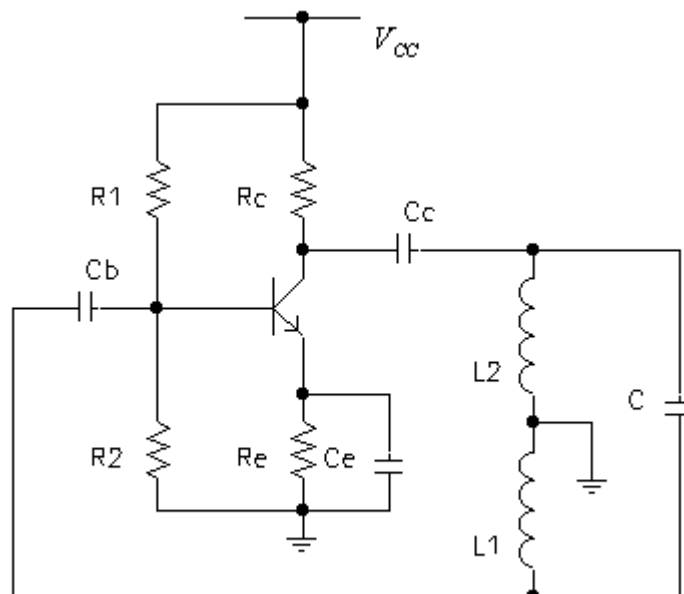
I resistori garantiscono la polarizzazione del transistor, mentre i condensatori C_b e C_c servono a disaccoppiare in continua. Il condensatore C_e serve a bypassare il resistore sull'emettitore.

Questo oscillatore è sempre un oscillatore a tre punti, per cui valgono le relazioni ricavate in precedenza. Per determinare la frequenza di oscillazione ω_0 si deve considerare dunque la relazione $X_1 + X_2 + X_3 = 0$. Sostituendo le espressioni delle reattanze si ottiene:

$$-\frac{1}{\omega_0 C_1} - \frac{1}{\omega_0 C_2} + \omega_0 L = 0 \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C_1 \cdot C_2} \sqrt{C_1 + C_2}}}$$

Configurazione Hartley a BJT

Vediamo la versione a BJT dell'oscillatore di Hartley:



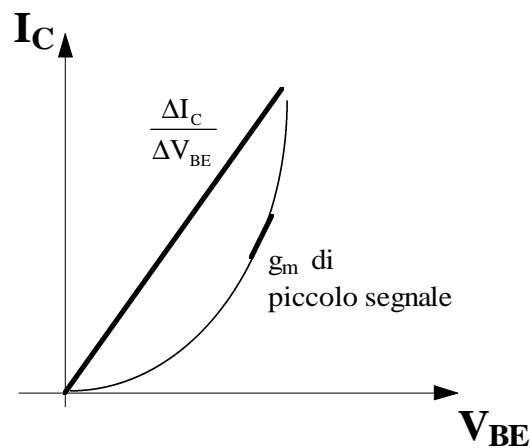
Anche per questo oscillatore la frequenza di oscillazione si ricava considerando la relazione tra le tre reattanze:

$$X_1 + X_2 + X_3 = 0 \Rightarrow \omega_0 L_1 + \omega_0 L_2 - \frac{1}{\omega_0 C} = 0 \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{C \cdot (L_1 + L_2)}}}$$

Osservazione

Si noti gli oscillatori a tre punti non hanno bisogno di circuiti limitatori di ampiezza: infatti, il circuito LC costituisce un filtro accordato alla frequenza di oscillazione, per cui, specie se il suo fattore di qualità Q è elevato, esso è in grado di produrre una tensione praticamente sinusoidale.

A differenza delle realizzazioni ad OPAMP, che incorporano limitatori d'ampiezza, gli oscillatori accordati LC (versioni speciali di quelli a 3 punti) utilizzano la trans-caratteristica non lineare I_C - V_{BE} o I_D - V_{GS} per controllare l'ampiezza. In particolare, se l'ampiezza delle oscillazioni tende a salire, il guadagno del transistor diminuisce al di sotto di quello di piccolo segnale:



La distorsione di non linearità viene eliminata a causa dell'azione filtrante del circuito risonante LC, per cui si ottiene una sinusoide di elevata purezza.

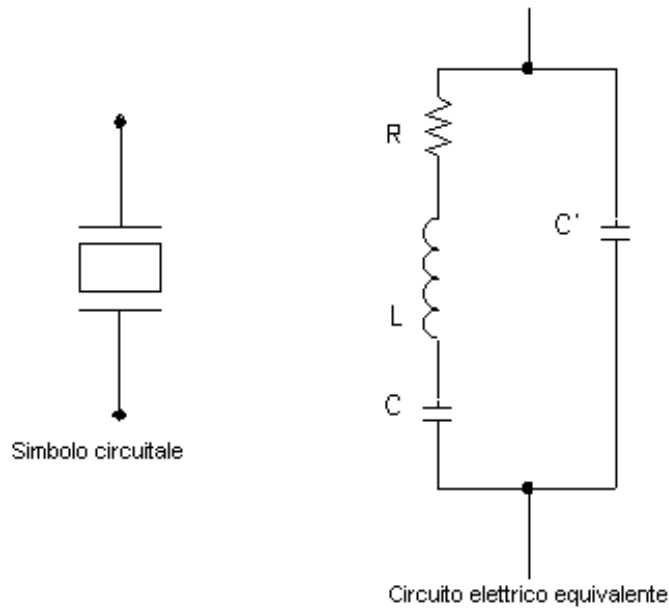
OSCILLATORE A CRISTALLO

Dato un **crystallo piezoelettrico** (quarzo), ponendo 2 elettrodi su due facce opposte e applicando tra tali elettrodi una certa differenza di potenziale, è possibile produrre delle forze sulle cariche del reticolo cristallino del crystallo stesso. Tali forze deformano la posizione delle cariche, in modo da realizzare un sistema elettro-meccanico che vibra se eccitato in modo opportuno.

La frequenza di risonanza ed il fattore di qualità Q del crystallo dipendono da vari parametri: tra questi citiamo soprattutto le dimensioni del crystallo e l'orientazione delle superfici rispetto agli assi cristallografici.

Dato che le caratteristiche del quarzo sono molto stabili nel tempo e dato che il fattore di qualità è molto elevato, gli oscillatori che utilizzano cristalli di quarzo hanno una eccezionale stabilità in frequenza.

Un crystallo di quarzo può essere rappresentato da un circuito elettrico RLC molto semplice:



Possiamo dare degli ordini di grandezza : $L=137$ Henry, $C=0,0235$ pF, $R=15$ k Ω , $C'=3,5$ pF.

Si tratta del parallelo tra una serie RLC ed una capacit  C' : quest'ultima rappresenta la capacit  elettrostatica tra gli elettrodi e risulta molto maggiore della capacit  C (anche due ordini di grandezza maggiore). Il fattore di qualit  Q del circuito risulta particolarmente elevato, il che consente di trascurare, in prima approssimazione, la presenza della resistenza R . Questo fa s  che l'impedenza $Z(j\omega)$ del cristallo risulti una pura reattanza: $Z(j\omega) = jX(\omega)$. Ricaviamo l'espressione analitica di tale reattanza tramite le note leggi dell'Elettrotecnica:

$$Z(j\omega) = \frac{1}{j\omega C'} // \left(\frac{1}{j\omega C} + j\omega L \right) = \frac{\frac{1}{j\omega C'} \cdot \left(\frac{1}{j\omega C} + j\omega L \right)}{\frac{1}{j\omega C} + j\omega L + \frac{1}{j\omega C'}} = -\frac{j}{\omega C'} \cdot \frac{1 - \omega^2 LC}{C - \omega^2 L C C' + C'} = -\frac{j}{\omega C'} \cdot \frac{1 - \omega^2 LC}{1 - \omega^2 LC + \frac{C}{C'}}$$

Mettendo in evidenza $-LC$ sia a numeratore che a denominatore si ottiene:

$$Z(j\omega) = -\frac{j}{\omega C'} \cdot \frac{-LC \cdot \left(\omega^2 - \frac{1}{LC} \right)}{-LC \cdot \left(\omega^2 - \frac{1}{LC} - \frac{1}{LC'} \right)} = -\frac{j}{\omega C'} \cdot \frac{\omega^2 - \frac{1}{LC}}{\omega^2 - \frac{1}{LC} - \frac{1}{LC'}}$$

Da questa espressione si deduce che il circuito ammette sia una **frequenza di risonanza serie** (tale cio  che $Z=0$) sia una **frequenza di risonanza parallelo** (tale cio  che $Z=\infty$):

$$\text{risonanza serie} \longrightarrow Z(j\omega_s) = 0 \longrightarrow \omega_s = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$\text{risonanza parallelo} \longrightarrow Z(j\omega_p) = \infty \longrightarrow \omega_p = \sqrt{\frac{1}{L \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C'} \right)}}$$

Queste due frequenze di risonanza differiscono per la presenza del termine $1/C'$ nell'espressione di ω_p : tuttavia, essendo $C' \gg C$, il termine $1/C'$ non ha molta influenza come termine additivo del termine $1/C$, per cui risulta che le due frequenze di risonanza sono molto vicine tra di loro. Ad esempio, considerando i valori numerici indicati in precedenza, si ottiene quanto segue:

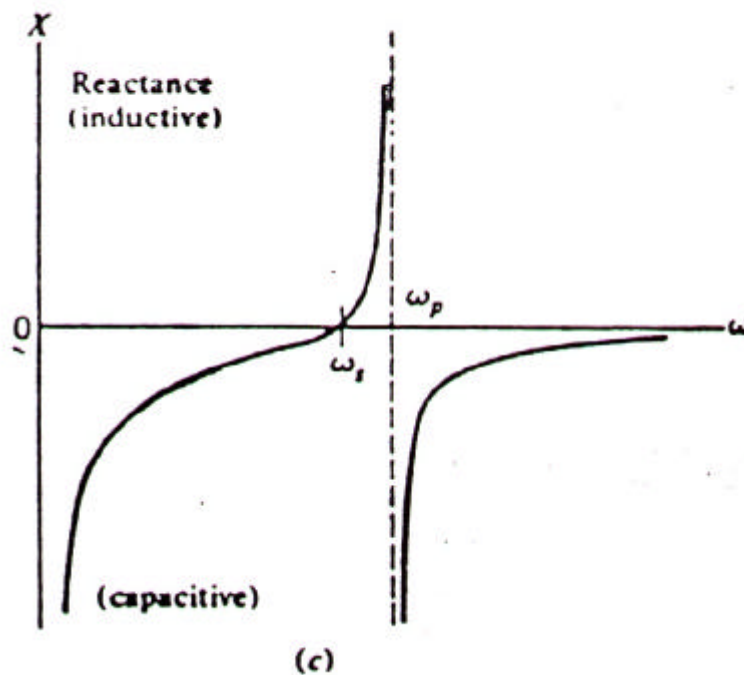
$$f_s = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{137 \cdot 0.0235 \cdot 10^{-12}}} = 88700.46916 \text{ Hz}$$

$$f_p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{L \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C'} \right)}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{137 \left(\frac{1}{0.0235 \cdot 10^{-12}} + \frac{1}{3.5 \cdot 10^{-12}} \right)}} = 88997.75113 \text{ Hz}$$

Ci sono appena 300 Hz di differenza.
Tornando al circuito, l'impedenza risulta

$$Z(j\omega) = -\frac{j}{\omega C'} \cdot \frac{\omega^2 - \omega_s^2}{\omega^2 - \omega_p^2}$$

L'andamento completo dell'ammettenza $X(\omega)$ in funzione di ω è indicato nella figura seguente:

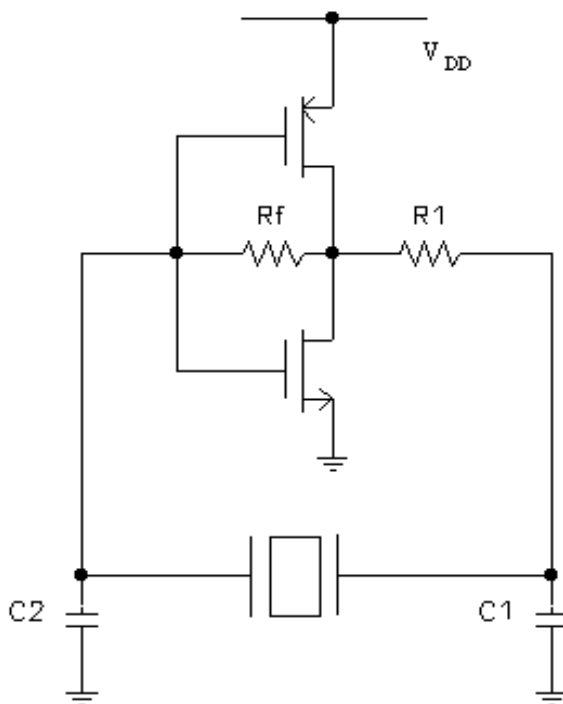


Si osserva dunque che $X(\omega)$ è negativa (cioè ha natura capacitiva) per $\omega < \omega_s$, mentre è positiva (per cui ha natura induttiva) per $\omega_s < \omega < \omega_p$. Avendo detto che ω_s e ω_p sono molto vicine tra di loro, *l'intervallo $[\omega_s, \omega_p]$ risulta molto piccolo, per cui è in tale intervallo che si utilizza il cristallo*: ponendo il cristallo in un oscillatore accordato LC, al posto dell'induttanza, il circuito oscillerà ad una frequenza compresa tra ω_s e ω_p (più vicina a ω_p); dato che sia ω_s sia ω_p non dipendono dal circuito in cui il cristallo è inserito, deduciamo che *la frequenza di oscillazione non dipende dal circuito, ma solo dalle caratteristiche del cristallo*.

Un oscillatore nel quale una induttanza sia stata sostituita da un quarzo si definisce **oscillatore quarzato** e nel prossimo paragrafo ne è citato un esempio.

Oscillatore di Pierce

Si tratta di un oscillatore quarzato nella versione Colpitts, ossia con due impedenze capacitive ed una sola induttiva (data dal cristallo di quarzo):



Il resistore R_f serve a fissare il punto di lavoro dell'inverter CMOS. Il circuito risuonerà alla frequenza di risonanza del parallelo tra la L del cristallo in serie a C e la capacità $C' + \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$; la capacità più piccola è C ed è quindi quella che predomina, per cui il circuito risonante può essere ricondotto alla serie tra L e C del quarzo. La frequenza di risonanza risulta dunque

$$\omega_0 \cong \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Inoltre, il resistore R_1 , insieme a C_1 , realizza un filtro passa basso che consente il filtraggio delle componenti armoniche a frequenza maggiore di quella di oscillazione del cristallo.

Oscillatori non lineari

PREMESSE

I circuiti in grado di generare onde non sinusoidali vengono detti **oscillatori non lineari**. In effetti, si tratta di un nome un po' improprio, in quanto il nome più opportuno è quello di **multivibratori**.

E' possibile fare una classificazione dei multivibratori in base alla presenza e, eventualmente, al numero di stati stabili:

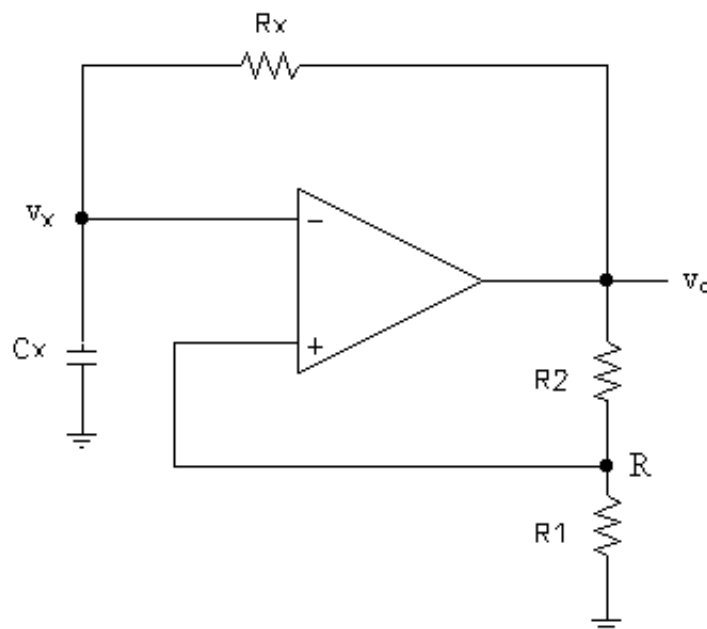
- si definiscono **astabili** quei multivibratori che non hanno alcuno stato stabile;
- si definiscono **stabili** quei multivibratori che hanno uno stato stabile (**multivibratori monostabili**) oppure due stati stabili (**multivibratori bistabili**)

I multivibratori astabili sono, per esempio, i generatori di onde quadre, onde rettangolari, onde triangolari e così via. Essi spesso utilizzano il *trigger di Schmitt*.

I multivibratori bistabili sono particolarmente importanti in quanto funzionano con due possibili stati stabili, il che li rende molto utili per la realizzazione delle *memorie RAM statiche*.

MULTIVIBRATORE ASTABILE A TRIGGER DI SCHMITT (O OP-AMP CLOCK)

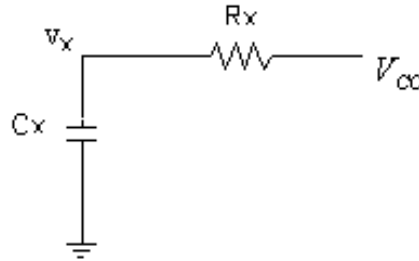
Lo schema circuitale di questo multivibratore è il seguente:



Supponiamo che le due resistenze R_1 ed R_2 siano uguali e assumiamo per l'operazionale un comportamento ideale. Constatiamo, inoltre, che l'amplificatore non può funzionare in alcun modo in zona lineare e quindi esso si troverà sempre in saturazione (o al valore positivo o a quello negativo, che supporremo essere dati dai valori delle tensioni di alimentazione).

Facciamo inoltre una duplice ipotesi circa la condizione iniziale del circuito: supponiamo che l'uscita sia fissata al valore della saturazione positiva (che assumiamo sia il valore V_{cc} dell'alimentazione positiva) e che l'ingresso V_x sia pari a $V_{ee}/2$, dove V_{ee} è il valore dell'alimentazione negativa.

In queste condizioni abbiamo il morsetto - dell'amplificatore operazionale alla tensione $V_{ee}/2$, mentre il morsetto + si trova alla tensione $V_{cc}/2$ (lo si deduce considerando il partitore di tensione tra R_1 e R_2 che sono tra loro uguali). In queste condizioni il circuito si riduce a :



L'operazionale non assorbe corrente dal morsetto invertente, per cui esso non turba la rete RC; inoltre, esso mantiene la tensione d'uscita costante al valore dell'alimentazione positiva, comportandosi come un generatore ideale di tensione. Di conseguenza, il condensatore tende a caricarsi verso il valore dell'alimentazione positiva, con condizione iniziale pari a $V_{ee}/2$, secondo la seguente legge:

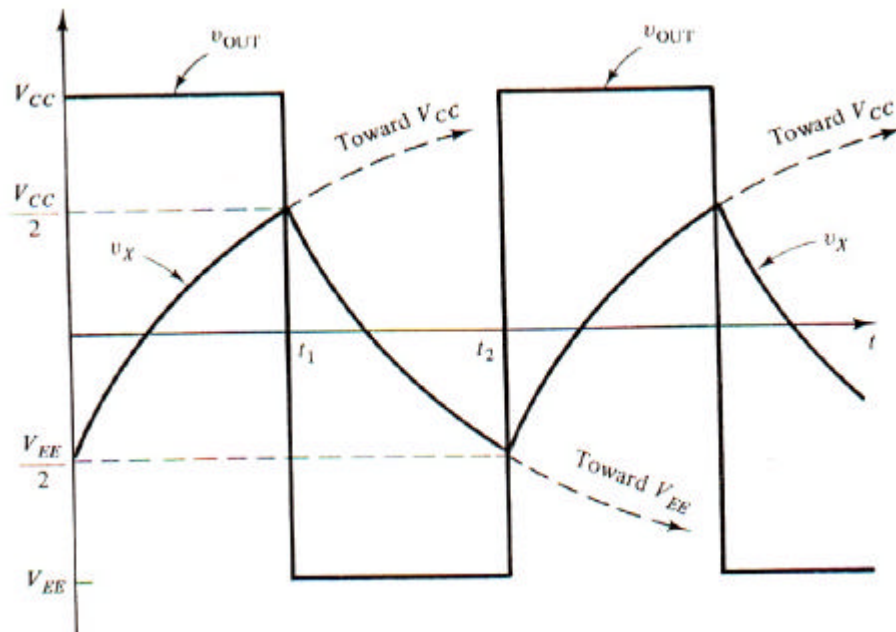
$$v_x = V_{cc} \cdot (1 - e^{-\frac{t}{R_x C_x}}) + \frac{V_{EE}}{2} \cdot e^{-\frac{t}{R_x C_x}}$$

Per $t=0$ la condizione iniziale viene verificata, così come per $t \rightarrow +\infty$ la tensione v_x tende a V_{cc} . La carica del condensatore non prosegue all'infinito fino a V_{cc} , poiché al valore di $V_{cc}/2$ la tensione sul morsetto invertente dell'amplificatore diventa uguale alla tensione del morsetto +. Quando accade ciò, il trigger scatta e l'uscita passa da V_{cc} a V_{ee} . Sia t_1 l'istante in cui avviene lo scatto: in questo istante, la rete RC è come se venisse sottoposta ad un gradino di tensione e quindi ci sarà un nuovo transitorio dove però la condizione iniziale sul condensatore è $V_{cc}/2$ e la tensione d'uscita dell'amplificatore è V_{ee} . Allora, dall'istante t_1 in poi, la tensione sul condensatore risulta essere :

$$v_x = V_{EE} \cdot (1 - e^{-\frac{t-t_1}{R_x C_x}}) + \frac{V_{CC}}{2} \cdot e^{-\frac{t-t_1}{R_x C_x}}$$

Se la tensione d'uscita dell'amplificatore è V_{ee} , il morsetto non invertente dell'amplificatore si trova a $V_{ee}/2$ e quindi in questo caso il trigger scatta nell'istante in cui la tensione del condensatore scende a $V_{ee}/2$. Indichiamo con t_2 l'istante in cui si ha il 2° scatto.

Questo processo si ripete periodicamente e all'uscita dell'amplificatore si genera un'onda quadra i cui valori sono quelli delle alimentazioni (l'onda sarà quadra se il valori delle alimentazioni sono uguali, altrimenti si genera un onda rettangolare). L'andamento delle tensioni del morsetto invertente e dell'uscita dell'amplificatore sono riportati nella seguente figura :



Gli istanti di commutazione si possono ricavare dalle precedenti equazioni imponendo $v_X = \frac{V_{CC}}{2}$ nella prima relazione, per ricavare t_1 , mentre $v_X = \frac{V_{EE}}{2}$ nella seconda per ricavare allo stesso modo $t_2 - t_1$.

Vediamo di calcolare t_1 :

$$v_X(t_1) = \frac{V_{CC}}{2} = V_{CC} \cdot (1 - e^{-\frac{t_1}{R_X C_X}}) + \frac{V_{EE}}{2} \cdot e^{-\frac{t_1}{R_X C_X}} \Rightarrow \left(\frac{V_{EE}}{2} - V_{CC}\right) \cdot e^{-\frac{t_1}{R_X C_X}} = -\frac{V_{CC}}{2} \Rightarrow$$

$$e^{\frac{t_1}{R_X C_X}} = \frac{-\frac{V_{CC}}{2}}{\frac{V_{EE}}{2} - V_{CC}} \Rightarrow -\frac{t_1}{R_X C_X} = \ln\left(\frac{-\frac{V_{CC}}{2}}{\frac{V_{EE}}{2} - V_{CC}}\right) \Rightarrow$$

$$t_1 = -R_X C_X \cdot \ln\left(\frac{-\frac{V_{CC}}{2}}{\frac{V_{EE}}{2} - V_{CC}}\right) = R_X C_X \cdot \ln\left(\frac{V_{CC} - \frac{V_{EE}}{2}}{\frac{V_{CC}}{2}}\right) = R_X C_X \cdot \ln\left(2 - \frac{V_{EE}}{V_{CC}}\right)$$

In maniera analoga si trova il valore di t_2 :

$$t_2 = t_1 + R_X C_X \cdot \ln\left(\frac{V_{EE} - \frac{V_{CC}}{2}}{\frac{V_{EE}}{2}}\right) = t_1 + R_X C_X \cdot \ln\left(2 - \frac{V_{CC}}{V_{EE}}\right)$$

Se le alimentazioni sono simmetriche si ha:

$$t_1 = R_X C_X \cdot \ln 3 \cong 1,1 \cdot R_X C_X$$

$$t_2 \cong t_1 + 1,1 \cdot R_X C_X = 2,2 \cdot R_X C_X$$

La frequenza di oscillazione vale

$$f_{osc} = \frac{1}{t_2}$$

Si definisce **duty cycle** la percentuale di tempo in cui la tensione d'uscita dell'amplificatore è uguale a V_{cc} nel periodo, cioè

$$DC = \frac{t_1}{t_2} \cdot 100$$

Se $V_{cc} = -V_{ee}$ si ha $DC = 50\%$.

Vediamo adesso di generalizzare il discorso. Indichiamo i valori di tensione all'uscita dell'amplificatore con V_{OH} (valore alto) e V_{OL} (valore basso), mentre con V_{RH} e V_{RL} i rispettivi valori di tensione del punto R. Inoltre supponiamo che R_1 e R_2 siano diverse. Allora le relazioni per i due istanti t_1 e t_2 diventano:

$$t_1 = R_X C_X \cdot \ln \left(\frac{V_{RL} - V_{OH}}{V_{RH} - V_{OH}} \right)$$

$$t_2 = t_1 + R_X C_X \cdot \ln \left(\frac{V_{RH} - V_{OL}}{V_{RL} - V_{OL}} \right)$$

Inoltre si ha

$$V_{RH} = V_{OH} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad e \quad V_{RL} = V_{OL} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

Se sostituiamo queste due relazioni nelle due precedenti, otteniamo

$$t_1 = R_X C_X \cdot \ln \left(\frac{V_{OL} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} - V_{OH}}{V_{OH} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} - V_{OH}} \right)$$

$$t_2 = t_1 + R_X C_X \cdot \ln \left(\frac{V_{OH} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} - V_{OL}}{V_{OL} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} - V_{OL}} \right)$$

Se poniamo $V_{OH} = |V_{OL}|$, abbiamo

$$t_1 = R_X C_X \cdot \ln \left(\frac{-V_{OH} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} - V_{OH}}{V_{OH} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} - V_{OH}} \right) = R_X C_X \cdot \ln \left(\frac{-\frac{R_1}{R_1 + R_2} - 1}{\frac{R_1}{R_1 + R_2} - 1} \right)$$

$$t_2 = t_1 + R_x C_x \cdot \ln \left(\frac{-V_{OL} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} - V_{OL}}{V_{OL} \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} - V_{OL}} \right) = t_1 + R_x C_x \cdot \ln \left(\frac{-\frac{R_1}{R_1 + R_2} - 1}{\frac{R_1}{R_1 + R_2} - 1} \right)$$

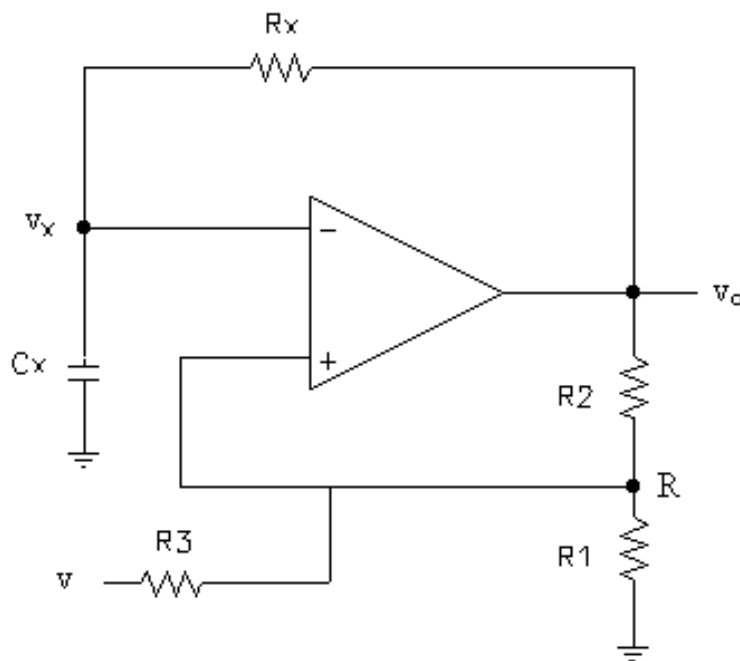
Semplificando gli argomenti degli algoritmi si ottiene

$$t_1 = R_x C_x \cdot \ln \left(\frac{-\frac{R_1}{R_1 + R_2} - 1}{\frac{R_1}{R_1 + R_2} - 1} \right) = R_x C_x \cdot \ln \left(\frac{-R_1 - R_1 - R_2}{R_1 - R_1 - R_2} \right) = R_x C_x \cdot \ln \left(\frac{2R_1 + R_2}{R_2} \right)$$

$$t_2 = t_1 + R_x C_x \cdot \ln \left(\frac{-\frac{R_1}{R_1 + R_2} - 1}{\frac{R_1}{R_1 + R_2} - 1} \right) = t_1 + R_x C_x \cdot \ln \left(\frac{-R_1 - R_1 - R_2}{R_1 - R_1 - R_2} \right) = t_1 + R_x C_x \cdot \ln \left(\frac{2R_1 + R_2}{R_2} \right)$$

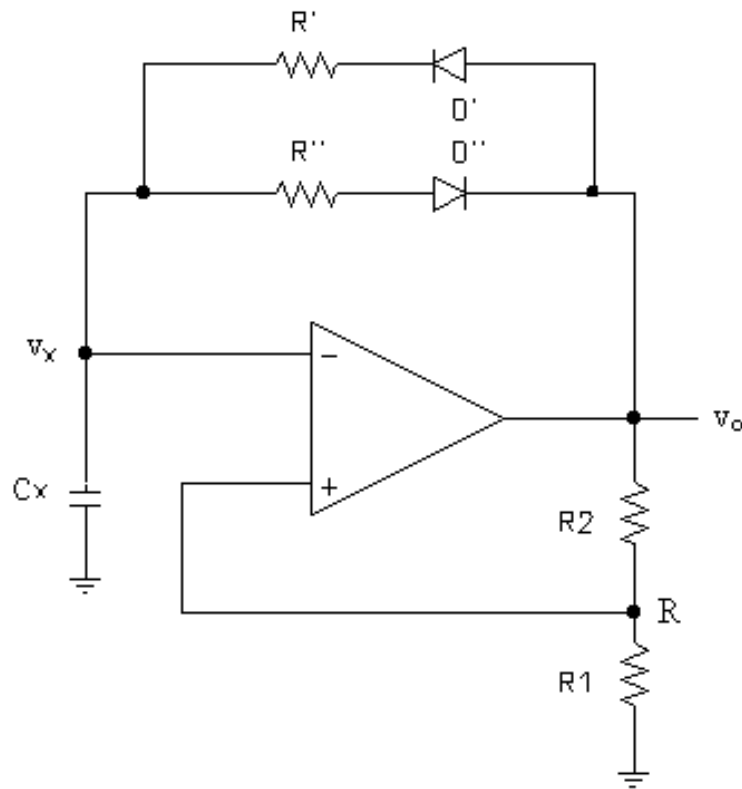
Comunque si scelgono i valori delle due resistenze, il duty cycle è sempre del 50%. In queste condizioni (cioè $V_{OH} = |V_{OL}|$), il valore delle resistenze R_1 ed R_2 serve a fissare la frequenza di oscillazione, ma l'onda che si genera è sempre quadra.

Vediamo ora le configurazioni circuitali che vengono utilizzate per generare **onde rettangolari**. Una possibilità è data dal seguente circuito :



Questo circuito, a differenza del precedente, consente di variare il valore della tensione del punto R al variare della tensione v e quindi permette di differenziare i valori di t_1 e $t_2 - t_1$.

Un'altra possibilità è data dal seguente circuito:



In questo circuito risultano differenti le costanti di tempo a seconda che il condensatore si carichi o si scarichi e quindi è ovvio che modificando R' e R'' si può modificare il duty cycle. In particolare se $R_1=R_2$ si ottiene

$$t_1 = R'C_x \cdot \ln 3 = 1,1 \cdot R'C_x$$

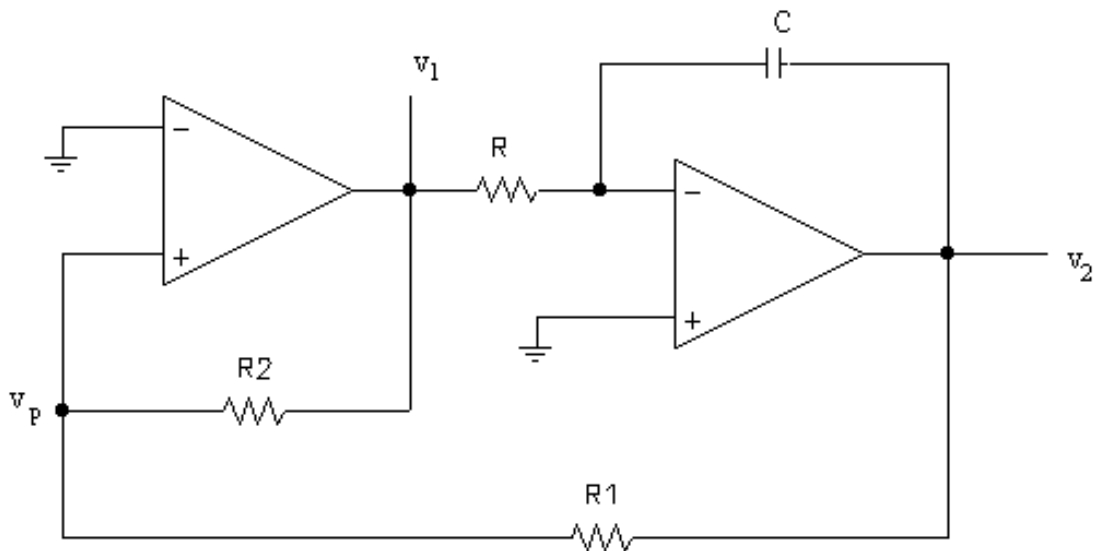
$$t_2 = t_1 + R''C_x \cdot \ln 3 = t_1 + 1,1 \cdot R''C_x$$

Allora si ottiene

$$DC = \frac{t_1}{t_2} \cdot 100 = \frac{1,1 \cdot R'C_x}{1,1 \cdot R'C_x + 1,1 \cdot R''C_x} \cdot 100 = \frac{R'}{R'+R''} \cdot 100$$

GENERATORE DI ONDE TRIANGOLARI A TRIGGER DI SCHMITT

Le forme d'onda esponenziali generate nell'OP-AMP clock possono essere rese **triangolari** sostituendo il circuito passa basso RC con un integratore (che a sua volta può essere visto come un filtro passa basso con frequenza di taglio nulla). Consideriamo il seguente circuito:



Come si può vedere, il primo operazionale, insieme a R_1 e R_2 , funziona da *trigger di Schmitt* in configurazione non invertente; l'uscita v_1 del trigger si trova poi all'ingresso di un integratore. Allora se il trigger genera un'onda quadra, automaticamente l'integratore dà in uscita un'onda triangolare.

La tensione v_1 può assumere solo due valori (le due tensioni di saturazione del primo operazionale) che indichiamo con : V_{1H} e V_{1L} ; supponiamo che all'istante $t=0$ il trigger scatti al valore V_{1H} , allora la tensione in uscita all'integratore, partendo da un valore k , comincerà a decrescere, con pendenza costante, secondo la legge:

$$v_2(t) = -\frac{1}{RC} \cdot V_{1H} \cdot t + k$$

dove k è il valore iniziale.

La tensione v_2 pilota il trigger ed essa diminuirà fino a che il trigger non scatterà al valore V_{1L} ; allora l'uscita v_2 comincerà a crescere con la stessa pendenza costante, con la quale decresceva, fino al valore k , in corrispondenza del quale il trigger scatta nuovamente a V_{1H} facendo ricominciare il ciclo. Indichiamo con V_{TL} e V_{TH} i valori di tensione massima e minima che si hanno all'uscita dell'integratore e con t_1 e t_2 gli istanti in cui si hanno i due scatti nel periodo; allora si ha:

$$v_2(t) = -\frac{1}{RC} \cdot V_{1H} \cdot t + V_{TH} \longrightarrow v_2(t_1) = V_{TL} = -\frac{1}{RC} \cdot V_{1H} \cdot t_1 + V_{TH} \longrightarrow t_1 = \frac{(V_{TH} - V_{TL}) \cdot RC}{V_{1H}}$$

Sappiamo che per un trigger i valori di tensione in cui si hanno gli scatti sono dati da:

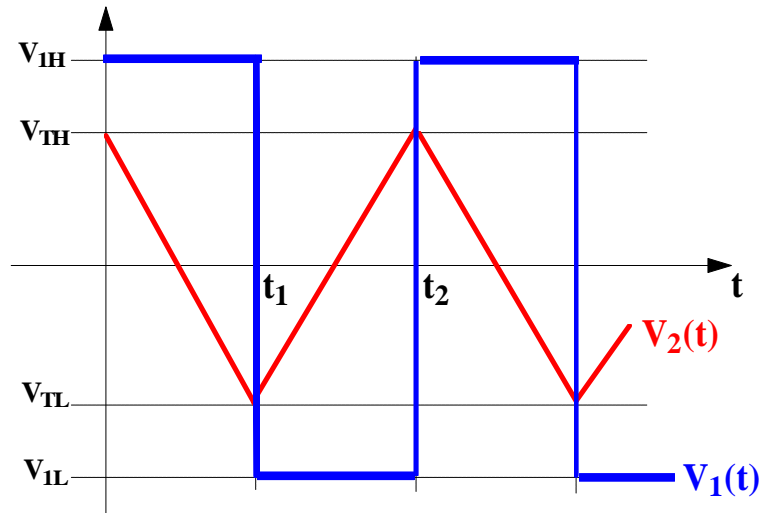
$$V_{TL} = -V_{1H} \cdot \frac{R_1}{R_2} \quad \text{e} \quad V_{TH} = -V_{1L} \cdot \frac{R_1}{R_2}$$

Se supponiamo allora che $V_{1H} = -V_{1L}$, combinando le ultime tre relazioni otteniamo

$$t_1 = \frac{\left(-V_{IL} \cdot \frac{R_1}{R_2} + V_{IH} \cdot \frac{R_1}{R_2}\right) \cdot RC}{V_{IH}} = \frac{\left(V_{IH} \cdot \frac{R_1}{R_2} + V_{IH} \cdot \frac{R_1}{R_2}\right) \cdot RC}{V_{IH}} = \left(\frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R_2}\right) \cdot RC = 2 \cdot \frac{R_1}{R_2} \cdot RC$$

L'istante t_1 individua l'intervallo di tempo in cui la tensione all'uscita dell'integratore decresce; per determinare l'intervallo di tempo in cui la tensione v_2 cresce si deve procedere allo stesso modo e nelle stesse ipotesi di prima ($V_{IH} = -V_{IL}$) si ottiene un intervallo temporale uguale e quindi $t_2 = 2t_1$.

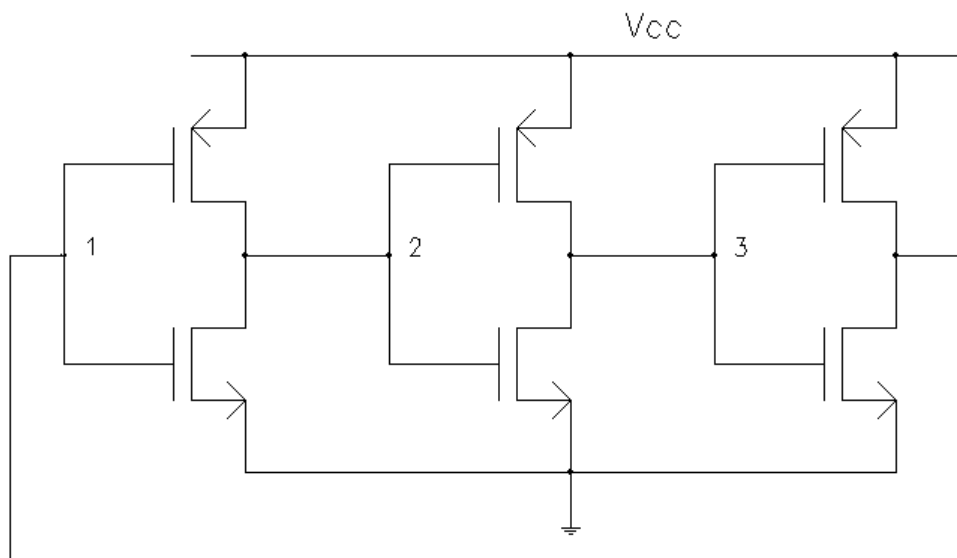
L'andamento di v_1 e v_2 sono riportati qui di seguito:



RING OSCILLATOR

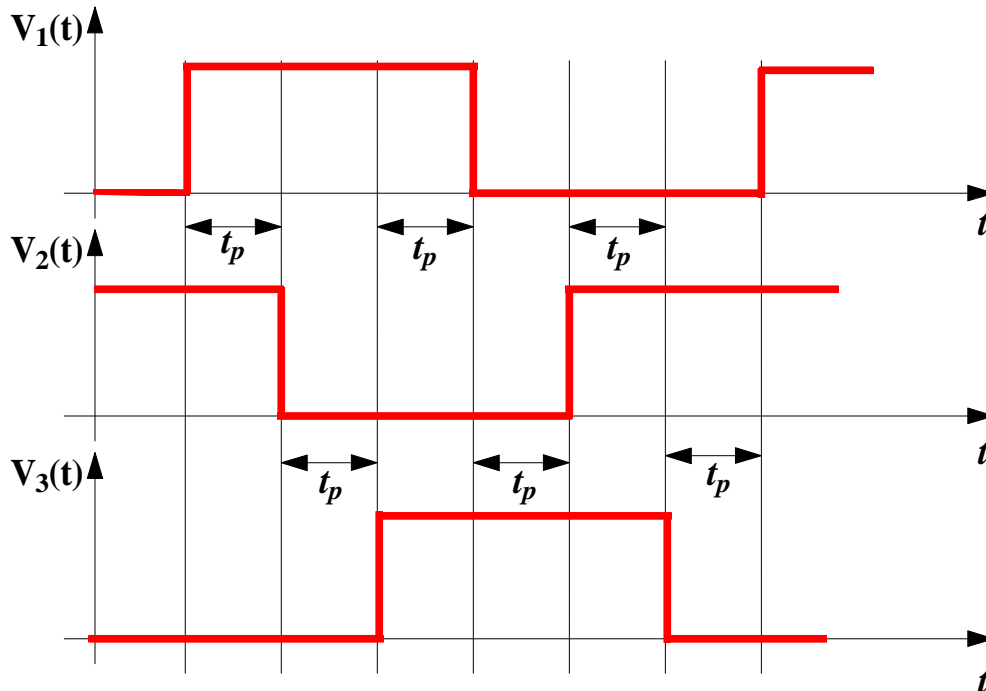
Il ring oscillator è un oscillatore usato tipicamente nei circuiti digitali. Esso è costituito da un numero dispari di dispositivi CMOS invertenti in cascata. Normalmente si usano almeno 5 invertitori.

Vediamo, per semplicità, cosa succede per 3 invertitori. Lo schema circuitale è il seguente:



Supponiamo che ci sia un fronte di salita di tensione al nodo 1: questo fronte di salita viene invertito dal primo inverter, presentandosi come fronte di discesa per il secondo, il quale lo inverte a sua volta, presentandolo nuovamente come fronte di salita al terzo inverter; questo compie l'ulteriore inversione, per cui il segnale si presenta nuovamente al primo inverter, ma come fronte di discesa.

Quindi, partendo da un fronte di salita al nodo 1, esso si propaga lungo la catena e, se t_p è il ritardo introdotto dal singolo stadio, dopo $3t_p$ ritorna al nodo 1 invertito (fronte di discesa al nodo 1). Questo fronte di discesa si propaga e torna ancora una volta invertito (fronte di salita al nodo 1) dopo $3t_p$. L'andamento temporale delle tensioni ai 3 nodi è il seguente:



Deduciamo che il periodo dell'oscillazione è pari a $6t_p$, mentre la frequenza è ovviamente $1/6t_p$.

In generale, usando N invertitori (con N dispari), il periodo risulta essere $T = 2Mt_p$, mentre la frequenza è $f = 1/T = 1/2Mt_p$.

Il ring oscillator è un mezzo molto semplice per misurare il ritardo di propagazione di un inverter CMOS.

Autore: **SANDRO PETRIZZELLI**
 e-mail: sandry@iol.it
 sito personale: <http://users.iol.it/sandry>
 succursale: <http://digilander.iol.it/sandry1>