Gli integrali gaussiani

F. Bonani, S. Donati Guerrieri
Dipartimento di Elettronica
Politecnico di Torino

Si denota con integrale gaussiano fondamentale il seguente integrale:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-y^2}\, \mathrm{d}y = \sqrt{\pi} \tag{1}$$

da cui, data la parità della funzione integranda, segue anche:

$$\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-y^2}\, \mathrm{d}y = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \tag{2}$$

L'integrale gaussiano fondamentale riveste notevole importanza nella soluzione di una classe di integrali, che possono o essere riportati nella forma (1) mediante opportuna sostituzione di variabile, o essere comunque valutati a partire dalla (1).

Tra gli integrali che si possono calcolare a partire dalla (1) mediante sostituzione di variabile si hanno:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha y^2}\, \mathrm{d}y = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}} \tag{3}$$

e:

$$\int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha y^2}\, \mathrm{d}y = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}} \tag{4}$$

Un esempio di applicazione della (3) è stato visto nel problema in cui è stata ricavata la equazione di Richardson (prob. 2.2.1 nell'eserciziario). In tale problema si è trovato da risolvere l'integrale:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-mv_y^2/(2k_\mathrm{B}T)}\, \mathrm{d}v_y \tag{5}$$

dove v_y è la componente della velocità degli elettroni lungo la direzione y, k_B è la costante di Boltzmann e T la temperatura del gas di elettroni. A partire dalla (4), derivando ambo i membri rispetto al parametro α, si ottiene:

$$\int_{0}^{\infty} y^2\mathrm{e}^{-\alpha y^2}\, \mathrm{d}y = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\alpha^3}} \tag{6}$$

mentre derivando due volte ambo i membri rispetto al parametro α si ha:

$$\int_0^\infty y^4 \mathrm{e}^{-\alpha y^2} \, \mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\alpha^2} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}} \right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{8\sqrt{\alpha^5}}. \tag{7}$$

Generalizzando, derivando successivamente rispetto al parametro α è possibile valutare anche integrali di ordine superiore, ovvero integrali in cui la funzione integranda sia del tipo $y^{2n}\mathrm{e}^{-\alpha y^2}$, con n intero.

I risultati ottenuti in (6) e (7) vengono utilizzati nella risoluzione di numerosi problemi affrontati durante le esercitazioni. In particolare risultano utili nella valutazione degli integrali in cui la funzione di distribuzione degli elettroni, ovvero la funzione di Fermi, viene approssimata con la semplice distribuzione esponenziale di Maxwell-Boltzmann (integrali di questo tipo si hanno per esempio nella soluzione dei problemi 3.1.1 e 3.1.4 dell'eserciziario). In questi problemi gli integrali da risolvere sono riportati, dopo una prima sostituzione di variabili nella forma canonica:

$$\int_0^\infty x^{1/2} \mathrm{e}^{-\alpha x} \, \mathrm{d}x \qquad \alpha = \frac{1}{k_\mathrm{B} T} \tag{8}$$

e:

$$\int_0^\infty x^{3/2} \mathrm{e}^{-\alpha x} \, \mathrm{d}x \qquad \alpha = \frac{1}{k_\mathrm{B} T}. \tag{9}$$

Mediante le sostituzioni:

$$y^2 = x \tag{10}$$

$$2y \, \mathrm{d}y = \mathrm{d}x \tag{11}$$

gli integrali (8) e (9) si riportano rispettivamente nella forma (6) e (7), e sono quindi facilmente risolubili:

$$\int_0^\infty x^{1/2} \mathrm{e}^{-\alpha x} \, \mathrm{d}x = 2 \int_0^\infty y^2 \mathrm{e}^{-\alpha y^2} \, \mathrm{d}y = \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha^3}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(k_\mathrm{B} T\right)^{3/2} \tag{12}$$

e, infine:

$$\int_0^\infty x^{3/2} \mathrm{e}^{-\alpha x} \, \mathrm{d}x = 2 \int_0^\infty y^4 \mathrm{e}^{-\alpha y^2} \, \mathrm{d}y = \frac{\pi}{2\sqrt{\alpha^5}} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \left(k_\mathrm{B} T\right)^{5/2}. \tag{13}$$